Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **SS 10**

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Bis Donnerstag, den 17.06., vor der Vorlesung in den Briefkästen — Blatt 8

Aufgabe 1. Seien der reelle Vektorraum $\mathbb{H}$ und die lineare Abbildung $C\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definiert durch

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C}) : a,b \in \mathbb{C} \right\}, \qquad C\colon \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die folgenden Elemente eine Basis von $\mathbb{H}$ bilden:

$$e_0 = 1_{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

(b) Zeige, dass $q_1 \cdot q_2 \in \mathbb{H}$ für alle $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$.

(c) Sei $q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ und $\bar{q} := C(q)$. Berechne die Produkte $\bar{q} \cdot q$ und $q \cdot \bar{q}$.

(d) Zeige, dass $\mathbb{H}^\times := \mathbb{H} \setminus \{0\}$ eine multiplikative Gruppe mit neutralem Element $1_{\mathbb{H}}$ ist. Dazu genügt es, das zu $q \in \mathbb{H}^\times$ inverse Element $q^{-1} \in \mathbb{H}^\times$ explizit anzugeben.

Aufgabe 2. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + ax_4 &= 3, \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 &= 2, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + ax_4 &= 2, \\ 3x_1 + (4-a)x_3 + x_4 &= b. \end{aligned}$$

Gib Beispiele für Werte von a und b an, für die das Gleichungssystem (a) unendlich viele, (b) keine, (c) eine eindeutige Lösung hat.

(d) Gib die allgemeine Lösung für den Fall $a = 0$, $b = 1$ an.

Aufgabe 3. Sei V ein komplexer Vektorraum, $\mathrm{Nil}(V) = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f^n = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ mit $f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ mal}}$. Zeige für $f \in \mathrm{Nil}(V)$:

(a) Ist $g \in \mathrm{Nil}(V)$ und $f \circ g = g \circ f$, so ist $f \circ g, f + g \in \mathrm{Nil}(V)$.

(b) Die Abbildung $\mathrm{Id}_V - f$ ist invertierbar. (*Hinweis:* Geometrische Reihe.)

(c) Die Folge der Untervektorräume $V_k := \ker f^k \subseteq V$ erfüllt $V_k \subseteq V_{k+1}$ und $f(V_{k+1}) \subseteq V_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ sowie $V_1 \neq 0$ und $V_k = V$ für hinreichend große $k \in \mathbb{N}$.

(d) Es gibt eine Basis B von V, bezüglich derer die Darstellungsmatrix $(a_{ij})_{ij} := M_B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist und auf der Diagonale nur Nullen stehen hat, das heißt, $a_{ij} = 0$ falls $i \geq j$. (*Hinweis:* Betrachte die Unterräume V_k.)

Aufgabe 4. Bezeichne V den komplexen Vektorraum aller Polynome

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

vom Grad kleiner gleich 3 und Koeffizienten $a_0, \dots, a_3 \in \mathbb{C}$. Wir definieren Abbildungen $D, T_a \colon V \to V$ durch

$$(DP)(x) := P'(x) = \frac{\partial}{\partial x} P \qquad \text{und} \qquad (T_aP)(x) := P(x-a) \text{ für ein festes } a \in \mathbb{C}.$$

Bestimme für diese Abbildungen jeweils (a) den Kern, (b) das Bild, (c) die Darstellungsmatrix bezüglich der Basis x^0, x^1, x^2, x^3 und (d) ob sie in $\mathrm{Nil}(V)$ enthalten ist.