Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 10**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Bis Donnerstag, den 03.06., vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 6

In den folgenden Aufgaben sind oft die Ergebnisse von Blatt 5 anzuwenden.

Aufgabe 1. (a) Sei $0 < a$. Zeige mit Hilfe der Substitution $x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{z})$ in der Formel für die Betafunktion

$$B(a,a) = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right).$$

(b) Schlußfolgere den *Legendreschen Verdoppelungssatz*

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$$

Aufgabe 2. Zeige:

(a) $$\int_0^1 \mathrm{d}x\, x^{p-1}(1-x^m)^{q-1} = \frac{1}{m} B\left(\frac{p}{m}, q\right) \quad \text{für alle } p,q,m > 0,$$

(b) $$\int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} \cdot \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{x^n}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \frac{\pi}{2n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^\times,$$

(c) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x\, \sin^{a-1} x \cos^{b-1} x = \frac{\Gamma(\frac{a}{2})\Gamma(\frac{b}{2})}{2\Gamma(\frac{a+b}{2})} \quad \text{für alle } a,b > 0.$$

Hinweis zu (c): Substituiere $y = \sin^2 x$.

Aufgabe 3. Sei $0 < a < 1$ und

$$I_a(c,d) := \int_c^d \mathrm{d}x\, \frac{x^{a-1}}{1+x} \quad \text{für } 0 \le c < d \le \infty.$$

(a) Berechne das Integral $I_a(0,1)$ durch Entwicklung des Integranden auf dem Intervall $(0,1)$ in eine Potenzreihe. Prüfe dabei genau die Integrierbarkeit der Partialsummen der Potenzreihe und die Anwendbarkeit der gliedweisen Integration.

(b) Berechne das Integral $I_a(1,\infty)$ durch Substitution $x = z^{-1}$ und Anwendung von (a) und zeige:

$$I_a(0,\infty) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right).$$

(c) *Bemerkung: Es gilt auch* $I_a(0,\infty) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi a)}$. *(Siehe Ergänzung)*
Zeige unter Verwendung von Blatt 5, Aufgabe 2(d), den *Eulerschen Ergänzungssatz*

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

(d) Zeige unter Verwendung von 2(c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x\ \tan^c x = \frac{\pi}{2\cos\frac{c\pi}{2}} \qquad \text{für alle } c \in\,]-1,1[.$$

Aufgabe 4. Bestimme, welche der folgenden Abbildungen linear ist:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (ax+by, cx+dy)$, mit Konstanten $a,b,c,d \in \mathbb{R}$;

(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \Big((x+y)^2 - (x-y)^2, x+y\Big)$;

(c) $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 2x+3y-1$;

(d) $k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto |x-y| + |x+y|$.

Ergänzung zu Aufgabe 3(c)
Sei $0 < a < 1$. Für $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \cos(a(x-\pi))$ findet man nach Blatt 5, Aufgabe 4(a), die Koeffizienten $[\cos(n\pi) = (-1)^n]$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx\ f(x)\cos(nx) = \frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^{2\pi} dx\ f(x)\cos(n(x-\pi)) \\
&= \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx\ \Big(\cos\big((a+n)(x-\pi)\big) + \cos\big((a-n)(x-\pi)\big)\Big) \\
&= \frac{(-1)^n}{2\pi}\Big(\frac{\sin(a+n)(x-\pi)}{a+n} + \frac{\sin(a-n)(x-\pi)}{a-n}\Big)\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\sin(\pi a)\Big(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\Big)\ ,
\end{aligned}$$

analog $b_n = 0$. Nach Dirichlet-Kriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)$ wegen $|a_n| \le \frac{a}{\pi(n^2-a^2)}$ gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $\tilde{f} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$. Nach der später bereitgestellten Theorie der Fourierreihen ist $\tilde{f} = f$, so daß gilt:

$$\cos(a(x-\pi)) = \frac{\sin(\pi a)}{\pi}\Big(\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\Big)\cos(nx)\Big)\ .$$

Für $x = \pi$ folgt

$$\frac{\pi}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\Big)\ .$$