Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 07**
Dr. J. Schürmann

Üungen zur Mathematik für Physiker IV

Abgabe: Dienstag, 12.06.07 bis 12.00 im BK 157/158. Blatt 8

Beachten Sie die erneute Änderung des Abgabetermins, welcher nun wieder Dienstags sein wird!
Die Übung von Do. den 07.06 wird auf Di. den 05.06 um 18.00 s.t. im M3 vorverlegt! Am 04. und 05.06 findet der 2. Test in den Übungen statt!

Aufgabe 1. Thema: Fourier-Reihen und -Integrale. Es bezeichne $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ den *Schwartz-Raum* aller beliebig oft stetig differenzierbarer Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, welche im Unendlichen beliebig schnell fallen, d.h.

$$x^\alpha \partial^\beta f(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} f(x)$$

ist beschränkt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Beispiele sind $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen mit kompakten Träger oder die Funktion $e^{-a||x||^2}$ $(a > 0)$. Zeigen Sie für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

(a) Auch die Funktionen $f \cdot g$ und $x^\alpha \partial^\beta f$ gehören zu $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Für alle $N \in \mathbb{N}$ ist $|f(x)| \cdot ||x||^N$ beschränkt und somit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \geq 1$.

(b) Die *Fourier-Transformierte* $\hat{f}$ von f ist beliebig oft differenzierbar, mit:

$$\partial^\beta \hat{f} = (-i)^{|\beta|} \cdot \widehat{x^\beta f} \quad \text{und} \quad \widehat{\partial^\alpha \cdot f} = i^{|\alpha|} \cdot k^\alpha \hat{f} \,.$$

Insbesondere ist auch $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(c) Die *Fourier-Transformation* induziert einen Isomorphismus $\hat{}\;$: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, deren Inverse mittels der *Umkehrformel* beschrieben wird.

Aufgabe 2. Für $a > 0$ seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben als

$$f(x) := e^{-a|x|} \quad \text{und} \quad g(x) := \begin{cases} e^{-ax} & \text{für } a \geq 0, \\ 0 & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a + ik)} \quad \text{und} \quad \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2} \,.$$

Folgern Sie mit Hilfe der *Umkehrformel* und $2\cos(kx) = e^{ikx} + e^{-ikx}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \, \frac{\cos(kx)}{a^2 + k^2} = \frac{\pi}{a} e^{-a|x|} \,.$$

Aufgabe 3. Die *Hermiteschen Funktionen* $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien für $n \in \mathbb{N}$ definiert als:

$$h_n(x) := (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} = H_n(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} ,$$

mit H_n die Hermiteschen Polynome. Dann gehört h_n zum *Schwartz-Raum* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ aus Aufgabe 1. Zeigen Sie per Induktion:

$$\hat{h}_n = (-i)^n \cdot h_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Der Induktionsanfang $n = 0$ folgt aus Aufgabe 1 von Blatt 13 aus dem letzten Semester. Für den Induktionsschritt zeige man die Rekursionsformel $h_{n+1} = x \cdot h_n - h'_n$ und benutze partielle Integration sowie die erste Formel aus Aufgabe 1b.

Aufgabe 4. Für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ sei die *Faltung* $f * g$ von f und g definiert als

$$f * g(y) := \int_{\mathbb{R}^n} dx\, f(x) \cdot g(y - x) .$$

Nach dem Satz von Fubini existiert dieses Integral für fast alle $y \in \mathbb{R}^n$ und $f * g$ ist integrierbar.

(a) Zeigen Sie (mittels des Satzes von Fubini):

$$\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \hat{f} \cdot \hat{g} .$$

Für $a > 0$ sei $F_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die *Cauchysche Wahrscheinlichkeitsdichte*

$$F_a(x) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2} .$$

(b) Aus dem ersten Teil von Aufgabe 2 und der Umkehrformel folgt

$$\hat{F}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a|k|} .$$

Zeigen Sie mittels (a):

$$\widehat{F_a * F_b}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(a+b)|k|} = \hat{F}_{a+b}(k) ,$$

und folgern Sie mittels der Umkehrformel $F_a * F_b = F_{a+b}$.