Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 07**
Dr. J. Schürmann

Üungen zur Mathematik für Physiker IV

Abgabe: Donnerstag , 10.05.07 bis 12.00 im BK 157/158. Blatt 5

Aufgabe 1. Thema: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. *Reduktion der Ordnung:* Sei $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a, b : I \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Es sei $y_{(1)} : I \to \mathbb{K}$ eine Lösung der DGL

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \,,$$

mit $y_{(1)}(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Dann erhält man eine zweite linear unabhängige Lösung $y_{(2)} : I \to \mathbb{K}$ mittels $y_{(2)}(x) = u(x) \cdot y_{(1)}(x)$, wobei u eine nichtkonstante Lösung der DGL

$$u'' + \big(2\frac{y'_{(1)}(x)}{y_{(1)}(x)} + a(x)\big)u' = 0$$

ist, die im ersten Schritt zu

$$u'(x) = \frac{1}{y^2_{(1)}(x)} \exp\big(-\int_{x_0}^{x} dt\; a(t)\big)$$

integriert wird.

Aufgabe 2. Es sei $P(\frac{d}{dx}) := \frac{d^4}{dx^4} - 1$. Bestimmen Sie:

(a) ein komplexes bzw. reelles Fundamentalsystem der DGL:

$$P\big(\frac{d}{dx}\big)y = 0 \,.$$

(b) eine spezielle komplexe bzw. reelle Lösung der DGL:

$$P\big(\frac{d}{dx}\big)y = e^{2ix} \quad \text{bzw.} \quad P\big(\frac{d}{dx}\big)y = cos(2x) \,.$$

Aufgabe 3. Es sei $P(\frac{d}{dx}) := \frac{d^3}{dx^3} - \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} + 1$. Bestimmen Sie:

(a) ein reelles Fundamentalsystem der DGL: $P\big(\frac{d}{dx}\big)y = 0$.

(b) eine spezielle reelle Lösung der DGL: $P\big(\frac{d}{dx}\big)y = x \cdot e^x$.
Hinweis zu (b): benutzen Sie den Ansatz des entsprechenden Satzes der Vorlesung, sowie die Leibnitz-Regel für höhere Ableitungen von Produkten zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten.

Aufgabe 4. *Orthogonalität der Legendreschen Polynome.* Es seien

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n\,(x^2-1)^n$$

die Legendreschen Polynome n-ter Ordnung ($n \in \mathbb{N}_0$). Man zeige mittels partieller Integration (beachte: ± 1 sind n-fache Nullstellen von $(x^2-1)^n$):

(a)

$$\int_{-1}^{1} dx\,\big(P_n(x)\cdot P_m(x)\big) = 0 \quad \text{für } n, m \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n \neq m.$$

(b)

$$\int_{-1}^{1} dx\,P_n(x)^2 = \frac{2}{2n+1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis zu (b): Nach partieller Integration wie in (a) substituiere man $x = \cos(t)$, und zeige durch erneute partielle Integration die Rekursionsformel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\; sin^{2n+1}(t) = \frac{2n}{2n+1}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\; sin^{2n-1}(t)\;.$$

Allgemeine Hinweise:

- Übungszeiten: Mo: 8.00-10.00 im M6 und Do: 12.00-14.00 im M4 (die Anfangszeiten sind ct.).
- Die Aufgaben sind in Zweiergruppen abzugeben.
- Briefkästen: Mo: 8.00-10.00 den Bk. 157, Do. 12.00-14.00 den Bk. 158 .
- Die erste Aufgabe ist mündlich zu bearbeiten, d.h. die entsprechenden Begriffe werden in den Übungen diskutiert. Von den anderen drei Aufgaben ist genau eine in schriftliche Form abzugeben, wobei deren Auswahl jeder Gruppe selbst überlassen ist. Jede Aufgabe wird mit 5 Punkten bewertet.
- An folgenden Terminen finden zusätzliche Tests in den Übungen statt: 26.04 bzw. 30.04, 21.05 bzw. 24.05, 18.06 bzw. 21.06.
- Klausurtermin: Sa. den 07.07.2007, 15.30-18.00.