Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 07**
Dr. J. Schürmann

Üungen zur Mathematik für Physiker IV

Abgabe: Dienstag, 26.06.07 bis 12.00 im BK 157/158. Blatt 10

Aufgabe 1. Mündliche Aufgabe zum Thema: Sturmsche Randwertaufgaben, Randwertproblem, Greensche Funktion, Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem, Eigenwerte und -Funktionen, Fourier-Entwicklung. Zeigen Sie:

(a) Die *Randwertaufgabe* $y'' + y = 0$ auf dem Intervall $[0, \pi]$ mit der Randbedingung $y(0) = 1$ und $y(\pi) = 1$ (bzw. $y(0) = 1$ und $y(\pi) = -1$ ist nicht lösbar (bzw. hat unendlich viele Lösungen).

(b) Bestimmen Sie zunächst die allgemeine Lösung der inhomognen linearen DGL $y''+x^2 = 0$, und wählen Sie dann die auftretenden Konstanten so dass die *Randbedingung* $y(0) = 0$ und $y(1) = 0$ (bzw. $y(0) = 0$ und $y'(1) = 0$) erfüllt ist.

(c) Bestimmen Sie die *Greensche Funktion* des Randwertproblems für den Laplace-Operator in einer Variablen: $y'' = 0$ bezüglich der Randbedingungen $y(0) = 0 = y(1)$, $y(0) = 0 = y'(1)$ und $y(0) = 0 = \sigma \cdot y(1) + y'(1)$ (mit $\sigma > 0$ konstant).

Aufgabe 2. Wir betrachten die DGL der Schwingung einer Saite mit freien Enden bei $a = 0$ und $b = L > 0$ mit der Eigenfrequenz ω unter einer konstanten Kraft f:

$$Ly := y'' + \omega^2 y = f\,, \quad \text{mit } R_0(y) := y'(0) = 0 \text{ und } R_L(y) := y'(L) = 0.$$

Zusätzlich nehmen wir $\omega L \notin \pi\mathbb{Z}$ an. Zeigen Sie:

(a) Die zugehörige Greensche Funktion G ist gegeben durch

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{\cos(\omega x)\cos(\omega(t-L))}{\omega \sin(\omega L)} & \text{für } x \leq t, \\ \frac{\cos(\omega(x-L))\cos(\omega t)}{\omega \sin(\omega L)} & \text{für } x \geq t. \end{cases}$$

(b) Bestimmen Sie die (eindeutige) Lösung $y(x) = \int_0^L dt\, f \cdot G(x,t)$ dieses Randwertproblems.

Hinweis: Vergleiche mit Beispiel 2.9 der Vorlesung.

Aufgabe 3. Das *Eigenwertproblem*

$$y'' + \lambda y = 0\,, \quad \text{mit } y(0) - y(1) = 0 \text{ und } y'(0) - y'(1) = 0$$

ist kein *Sturm-Liouvillsches Eigenwertproblem.* Zeigen Sie:

(a) Alle Eigenwerte λ sind ≥ 0, und bestimmen Sie diese.

(b) Die zugehörigen Eigenräume E_λ sind für $\lambda \neq 0$ alle zweidimensional (im Unterschied zum Sturm-Liouvillsches Eigenwertproblem, wo nach Satz 2.38 alle Eigenräume eindimensional sind). Bestimmen Sie hierzu alle Eigenfunktionen.

Aufgabe 4. *Temperaturverteilung in einem Stab.* $\theta(x,t)$ sei die orts- und zeitabhängige Temperaturverteilung in einem von $x = 0$ bis $x = L > 0$ reichenden dünnen Stab, dessen linkes Ende auf konstanter Temperatur 0 gehalten wird, während am rechten Ende Wärmeabgabe an ein umgebendes Medium der Temperatur 0 möglich ist. Die Temperaturverteilung ergibt sich dann als Lösung der *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

mit der *Randbedingung*:

$$\theta(0,t) = 0\,, \quad \text{und} \quad \frac{\partial\theta}{\partial x}(L,t) + \sigma \cdot \theta(L,t) = 0 \text{ für alle } t \geq 0.$$

Hierbei sind a und σ positive Materialkonstanten. Zeigen Sie:

(a) Mit dem Produktansatz $0 \neq \theta(x,t) = y(x) \cdot \tau(t)$ ergibt sich für y das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem:

$$y'' + \lambda y = 0\,, \quad \text{mit } y(0) = 0 \text{ und } \sigma \cdot y(L) + y'(L) = 0,$$

und für τ die DGL: $\tau' + \lambda a^2 \cdot \tau = 0$.

(b) Für jede Lösung y des Eigenwertproblems aus (a) ergibt sich mittels partieller Integration:

$$\lambda \int_0^L dx\; y^2 = -\int_0^L dx\; y \cdot y'' = \sigma \cdot y(L)^2 + \int_0^L dx\; (y')^2\,.$$

Folgern Sie hieraus dass jeder Eigenwert λ positiv ist. Dann sind die Eigenwerte λ die positiven Lösungen der Gleichung

$$\tan(L \cdot \sqrt{\lambda}) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\sigma}\,.$$

Skizzieren Sie die Lösungen $\alpha > 0$ der Gleichung $\tan(\alpha) = -\alpha$ graphisch.

(c) Geben Sie die entsprechende Eigenfunktionen y_n sowie die Reihenentwicklung einer allgemeinen Lösung $\theta(x,t)$ der Wärmeleitungsgleichung mit obigen Randbedingungen an.

Hinweis: Vergleiche mit Beispiel 2.10 der Vorlesung.