

Übungen zur Mathematik für Physiker IV

Abgabe: Dienstag, 10.04.07, um 11.00 in der Vorlesung

Blatt 1

Aufgabe 1. Thema: Integration über Untermannigfaltigkeiten. Wiederholen Sie die folgenden Definitionen bzw. Begriffe: differenzierbare Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n , Tangentialraum im Punkte einer Untermannigfaltigkeit, Immersion, lokale Karte, Integral einer Funktion über eine Untermannigfaltigkeit.

Aufgabe 2. Das Newton-Potential einer mit Masse konstanter Dichte ρ belegten Sphäre $S(R) := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2\}$ vom Radius $R > 0$. Man zeige: Im Punkt $p = (0, 0, a)$ mit $a \geq 0$ ist

$$u(p) := \int_{S(R)} dS \frac{\rho}{\|x - p\|} = \begin{cases} 4\pi R\rho & \text{für } a \leq R, \\ \frac{M}{a} & \text{für } a > R, \text{ mit } M := 4\pi R^2\rho. \end{cases}$$

Aufgabe 3. Sei $L := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$ und $K \subset L$ die Teilmenge $K := \{(x, y, z) \in L \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

- (a) Zeigen Sie: L ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 .
- (b) Berechnen Sie das Volumen $v_2(K) := \int_L dS \delta_K$, mit δ_K die charakteristische Funktion von K .

Aufgabe 4. Seien r, R reelle Zahlen mit $0 < r < R$ und K die Kreislinie $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - R)^2 + z^2 = r^2, y = 0\}$. Durch Rotation von K um die z -Achse entsteht der Torus

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}.$$

- (a) Zeigen Sie: T ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 .
- (b) Berechnen Sie das Volumen $v_2(T) := \int_T dS$.

Allgemeine Hinweise:

- Übungszeiten: Mo: 8.00-10.00 im M6 und Do: 12.00-14.00 im M4 (die Anfangszeiten sind ct.).
- Erste Übungen am Do den 12.04 und Mo den 16.04.
- Die Aufgaben sind in Zweiergruppen abzugeben.
- Die Briefkästen stehen erst im Laufe des Semesters zur Verfügung. Bis dahin werden die Aufgaben in der Vorlesung Di 11.00 eingesammelt.
- Die erste Aufgabe ist mündlich zu bearbeiten, d.h. die entsprechenden Begriffe werden in den Übungen diskutiert. Von den anderen drei Aufgaben ist genau eine in schriftliche Form abzugeben, wobei deren Auswahl jeder Gruppe selbst überlassen ist. Jede Aufgabe wird mit 5 Punkten bewertet.
- An folgenden Terminen finden zusätzliche Tests in den Übungen statt: 26.04 bzw. 30.04, 21.05 bzw. 24.05, 18.06 bzw. 21.06.
- Klausurtermin: wird später mitgeteilt.