Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske

SS 06

Übungen zur Mathematik für Physiker II

Abgabe: Donnerstag, 27.04.06, vor der Vorlesung in den Briefkästen — Blatt 3

Aufgabe 1. Es sei G eine Gruppe mit neutralem Element e. Es gelte $g^2 = e$ für alle $g \in G$. Zeige: G ist abelsch.

Aufgabe 2. Es sei G eine abelsche Gruppe, H_1 und H_2 seien Untergruppen von G. Es gelte $H_1 \neq G, H_2 \neq G$. Zeige: Es gibt ein $g \in G$ mit $g \notin H_1 \cup H_2$.

Aufgabe 3. Es sei G eine Gruppe. Dann sind äquivalent (d.h. eine Aussage gilt genau dann, wenn eine andere gilt):
(a) G ist abelsch.
(b) $g \mapsto g^{-1}$ ist ein bijektiver Gruppenhomomorphismus.
(c) $g \mapsto g^2$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 4. Es sei G eine abelsche Gruppe. Es gelte $|G| < \infty$. Zeige.

$$\prod_{g \in G} g = \prod_{\substack{g \in G \\ g^2 = e}} g$$

Aufgabe 5. Es sei G eine abelsche Gruppe und $k \in \mathbb{Z}$. Durch $f_k : g \mapsto kg := (g + \ldots + g)$ (k-mal) werde eine Abbildung $f_k : G \to G$ definiert. Zeigen Sie:
(a) f_k ist ein Homomorphismus.
(b) Gilt $|G|$ und k sind teilerfremd, so ist f_k bijektiv.