Lie-Gruppen und die Klassifikation halbeinfacher Lie-Algebren - Seminar im WS 19/20

Leon Hendrian, Prof. Michael Weiss

Termin: t.b.a. (wird bei der Vorbesprechung entschieden)
Vorbesprechung: Montag, 15. Juli, 16:15, SR5 [1]

Talks may also be given in English[2].

Motivation: Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k ist ein Vektorraum zusammen mit einer bilinearen Abbildung $[-,-]\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, welche alternierend ist ($[x,x] = 0$) sowie die Jacobi-Identität erfüllt ($[x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] = 0$). Lie-Algebren treten in der Mathematik bspw. als natürliche Struktur auf dem Tangentialraum (am neutralen Element) einer Lie-Gruppe[3] auf. Auch jede assoziative k-Algebra A kann mittels $[a,b] := ab - ba$ zu einer Lie-Algebra gemacht werden.
In diesem Seminar wollen wir Lie-Algebren und (gegen Ende) ihre Darstellungen studieren. Es wird sich zeigen, dass jede Lie-Algebra aus einer auflösbaren und einer halbeinfachen Lie-Algebra zusammengesetzt werden kann. Die Klassifikation halbeinfacher Lie-Algebren (über $\mathbb{C}$) ist eines der Ziele des Seminars.

Voraussetzungen: Ein (gutes) Verständnis von Linearer Algebra, insbesondere Eigenwerten und Skalarprodukten, sollte für die erfolgreiche Teilnahme am größten Teil des Seminars genügen. An einigen Stellen[4] sind Kenntnisse über Mannigfaltigkeiten und Tangentialräumen hilfreich. Es können sowohl Bachelor- als auch Masterstudenten teilnehmen.

Vorläufiger Vortragsplan

Der Plan kann noch der Anzahl sowie den Kenntnissen und Wünschen der Seminarteilnehmer angepasst werden. Insbesondere könnte es zusätzliche Vorträge über die Darstellungstheorie von Lie-Algebren geben.

1. **Definitionen, Verbindung zu Lie-Gruppen**
   Definieren Sie im ersten Teil des Vortrags Lie-Algebren, deren Homomorphismen, Ideale sowie eventuell Tensorprodukte und Darstellungen und geben sie einfache Beispiele. Mögliche Quelle sind Kapitel 1 und 2 in Humphreys [1].
   Im zweiten Teil geht es um Lie-Gruppen und den Zusammenhang zu Lie-Algebren. Besprechen Sie dazu in etwa den Inhalt von Kapitel II.5, [3] und beweisen (oder skizzieren) Sie Theorem 5.4. unter Verwendung des Satzes von Ado.

[1] Ansonsten bitte per E-Mail an hendrian@uni-muenster.de und m.weiss@uni-muenster.de melden.
[2] We cannot guarantee that all other participants are willing to give their talks in English as well.
[3] Eine Lie-Gruppe ist eine glatte Mannigfaltigkeit und eine Gruppe, sodass die Multiplikation $M \times M \to M$ und Inversion $M \to M$ glatte Abbildungen sind.
[4] hauptsächlich in den Vorträgen 1,2

2. **Beispiele: Lie-Gruppen und Lie-Algebren über $\mathbb{C}$ in Dimension ≤ 3**
   Bevor wir tiefer in die Theorie eintauchen wollen wir einige Beispiele sehen. Klassifizieren Sie Lie-Algebren und Lie-Gruppen über den komplexen Zahlen in Dimension ≤ 3, erwähnen Sie nach Möglichkeit auch den reellen Fall.
   Quelle: Fulton-Harris [4], Kapitel 10.

3. **Nilpotente und auflösbare Lie-Algebren: Sätze von Engel und Lie**
   Hauptinhalt dieses Vortrags sollen die Konzepte von auflösbaren sowie nilpotenten Lie-Algebren, sowie die Sätze von Engel (eine Charakterisierung von Nilpotenz) und Lie (über auflösbare Lie-Algebren) sein.
   Quellen: Serre [2], Chapter V, 3* und 5* nach Bedarf weglassen. Alternativ Humphreys [1], 3.-4.

4. **Halbeinfache Lie-Algebren I**
   In diesem und den folgenden 3 Vorträgen wollen wir halbeinfache Lie-Algebren genauer verstehen. Zentral dafür ist die *Killing form*, eine bestimmte symmetrische Bilinearform auf einer Lie-Algebra L. Führen Sie diese ein. Besprechen Sie in diesem Vortrag in etwa Humphreys [1], 4.-6. (abzüglich der Schnittmenge von 4. mit dem vorigen Vortrag.)

5. **Halbeinfache Lie-Algebren II**
   $\mathfrak{sl}_2$ spielt eine besondere Rolle, verbringen Sie daher zunächst etwas (Vortrags-)Zeit mit diesem Beispiel, etwa nach Humphreys [1], 7. Besprechen Sie danach außerdem [1], 8, und führen Sie die *root space decomposition* ein. Wurzelsysteme werden dann in den nächsten zwei Vorträgen genauer studiert.
   Sollte noch Vortragszeit verbleiben, können Sie länger über $\mathfrak{sl}_2$ sprechen, Material findet sich z.b. in [4], 11.

6. **Wurzelsysteme I - Definition und Weyl-Gruppe**
   In diesem und dem nächsten Vortrag werden Wurzelsysteme axiomatisch besprochen. Führen Sie in diesem ersten Vortrag die Definition ein und besprechen Sie die Weyl-Gruppe eines Wurzelsystems.
   Quellen: Humphreys [1], III., 9. und 10., außerdem eventuell Beispiele aus [3], Kapitel 2.

7. **Wurzelsysteme II - Klassifikation mittels Dynkin-Diagrammen**
   Jetzt wollen wir irreduzible Wurzelsysteme mithilfe von Dynkin-Diagrammen klassifizieren. Folgen Sie dazu [1].
   Quellen: Humphreys [1], III., 11. und 12., außerdem eventuell Beispiele aus [3], Kapitel 2.

8. **Isomorphismus- und Konjugationssätze**
   Hier soll gezeigt werden: Verschiedene Lie-Algebren haben stets nicht-isomorphe Wurzelsysteme, sowie die Eindeutigkeit (bis auf Konjugation) der maximalen toralen Unteralgebra. Gehen Sie dazu nach Kapitel IV. aus [1], inklusive Exercise 14.1, vor.
   Quellen: Humphreys [1], Kapitel IV. (inklusive Exercise 14.1)

9. **Existenz**
   Um die Klassifikation abzuschließen, rekonstruieren wir jetzt aus einem Dynkin-Diagramm eine halbeinfache Lie-Algebra. Präsentieren Sie dazu den Inhalt von Humphreys [1], Kapitel V.

10. **Ado: Jede Lie-Algebra ist linear.**
    Ein Satz von Ado besagt, dass *jede* Lie-Algebra (in Charakteristik 0) nach $\mathfrak{gl}_n$ eingebettet werden kann. Beweisen Sie, soweit möglich diesen Satz. Eine mögliche Quelle ist [4], Appendix C und E. Eventuell können Sie auch die Erweiterung auf positive Charakteristik nach Hochschild [5] besprechen.

Literatur

[1] Humphreys, J.E. (1972). Introduction to Lie Algebras and Representation Theory

[2] Serre, J.P. (1965). Lie Algebras and Lie Groups - 1964 Lectures given at Harvard University

[3] Carter, R., Segal, G., Macdonald, I. (1995). Lectures on Lie Groups and Lie Algebras

[4] Fulton, W., Harris, J. (1991). Representation Theory - A First Course

[5] Hochschild, G. (1966). An Addition to Ado's Theorem. Proceedings of the American Mathematical Society, 17(2), 531-533. doi:10.2307/2035206