28.01.2018

Weitere Übungsaufgaben zur Wiederholung (Ungeordnet) Topologie WS 2017/18 (Weiss)

1. Sei $p\colon E \to B$ eine Faserung. Wenn $x, y \in B$ in derselben Wegzusammenhangskomponente von B liegen, dann sind die Fasern $p^{-1}(x)$ und $p^{-1}(y)$ homotopieäquivalent zueinander.

Wird erwähnt im "Review" Kapitel der Vorlesungsnotizen. Nicht verwechseln: "Faserung" (fibration) und "Faserbündel" (fiber bundle). Wir haben eine ähnliche Aussage für Faserbündel, Prop. 2.1.3, aber der Beweis davon lässt sich nicht übertragen. Achtung: eine Homotopieäquivalenz besteht aus 4 Teilen! Wenn Sie 2 davon in diesem Fall angeben können, ist es schonmal nicht schlecht!

2. Berechnen Sie die Homologiegruppen einer Fläche vom Geschlecht 2 (Oberfläche einer Brezel) unter Benutzung einer geeigneten Mayer-Vietoris-Folge.

Wurde in der letzten Vorlesungswoche angedeutet.

3. Für uns ist ein *Graph* dasselbe, wie eine semi-simpliziale Menge X, bei der die Mengen X_k für $k \geq 2$ allesamt leer sind. Dann ist X_1 die Menge der Kanten und X_0 die Menge der Ecken des Graphen. (Die Kanten sind unweigerlich gerichtet bzw orientiert, wenn man *Graph* so definiert.) Zeigen, dass für einen *zusammenhängenden* endlichen Graphen X gilt:

$$H_1(|X|) \cong \mathbb{Z}^{k-e+1}$$

wobei k die Anzahl der Kanten bezeichnet und e die Anzahl der Ecken.

4. Sei D^2 die (volle, kompakte) Einheitsscheibe in $\mathbb{C}$; wir benutzten hier komplexe Bezeichnungen. Sei $\xi = -1/2 + i\sqrt{3}/2 \in \mathbb{C}$ die bekannte dritte Einheitswurzel. Wir definieren einen Quotientenraum

$$X = D^2/\sim$$

von D^2 wie folgt: $x \sim y$ genau dann, wenn $x = y$ *oder* $|x| = |y| = 1$ und $x = \zeta^k y$ für irgendein $k \in \mathbb{Z}$ (oBdA ist $k = 1, 2$). ("Quotientenraum" bedeutet, dass X mit der Topologie versehen wird, bei der eine Teilmenge von X genau dann als offen gilt, wenn ihr Urbild in D^2 offen ist in der üblichen Topologie von D^2.)

- Beweisen Sie, dass $X \smallsetminus \{0\}$ homotopieäquivalent ist zu S^1. (Hier wurde $0 \in X$ geschrieben für das Bild von $0 \in D^2$ unter der Projektion $D^2 \to X$.)
- Berechnen Sie die Homologiegruppen von X unter Benutzung einer geeigneten Überdeckung von X mit offenen Teilmengen V und W und der dazugehörigen Mayer-Vietoris-Folge.

5. Erfinden Sie eine semi-simpliziale Menge Y derart, dass $|Y|$ homöomorph ist zum Raum X aus Aufgabe 4. Schreiben Sie dann den kombinatorischen Kettenkomplex $C(Y)$ aus; hier geht es im wesentlichen um die Bestimmung von zwei Matrizen mit ganzzahligen Einträgen aus $\mathbb{Z}$. Daraus sollten Sie die Homologiegruppen vom Kettenkomplex $C(Y)$ bestimmen können. Stimmt das mit Ihrem

Resultat zu Aufgabe 4 überein? Sollte da überhaupt eine Übereinstimmung sein? Wenn ja, warum?

6. Sei k eine feste natürliche Zahl. Sei X eine semi-simpliziale Menge mit der Eigenschaft, dass $X_n = \emptyset$ für $n > k$. Dann ist $H_k(|X|)$ eine freie abelsche Gruppe.

7. Sei k eine feste ganze Zahl. Zu jedem Kettenkomplex C existieren ein (anderer) Kettenkomplex D und eine Kettenabbildung $f\colon C \to D$ derart, dass

- $f_*\colon H_j(C) \to H_j(D)$ ein Isomorphismus ist für $j < k$;
- $H_k(D) = 0$

(*Hinweis*: man kann es so machen, dass $f\colon C \to D$ eine "Inklusion" von einem Unterkomplex ist.) Durch Iteration dieser Methode: Zu jedem Kettenkomplex C existieren ein (anderer) Kettenkomplex E und eine Kettenabbildung $g\colon C \to E$ derart, dass

- $g_*\colon H_j(C) \to H_j(E)$ ein Isomorphismus ist für $j < k$;
- $H_j(E) = 0$ für $j \geq k$.

8. Einen Kettenkomplex C bauen mit $H_0(C) \cong \mathbb{Z}/5$ und $H_1(C) \cong \mathbb{Z}/7$ und $H_j(C) = 0$ für $j \neq 0, 1$.

9. Konstruieren Sie einen Kettenkomplex C von *freien* abelschen Gruppen derart, dass $H_0(C) \cong \mathbb{Q}$ ist (als abelsche Gruppen, $\mathbb{Q}$ mit Addition) und $H_j(C) = 0$ für alle $j \neq 0$.

10. Kettenkomplexe C und D sind wie folgt definiert.

- $C_0 = C_1 = \mathbb{Z}$, $d_1\colon C_1 \to C_0$ ist Multiplikation mit 5, alle C_j für $j \neq 0, 1$ sind 0;
- $D_1 = \mathbb{Z}$, alle D_j für $j \neq 1$ sind 0.

Man berechne die abelsche Gruppe $[C, D]$ der Homotopieklassen von Kettenabbildungen.

11. Sei $\mathcal{E}$ irgendeine Kategorie. Sei F ein (kovarianter) Funktor von der Kategorie der semi-simplizialen Mengen nach $\mathcal{E}$.

- Zeigen Sie, dass F immer einen rechtsadjungierten Funktor G besitzt (von $\mathcal{E}$ in die Kategorie der semi-simplizialen Mengen). *Hinweis: Nehmen Sie irgendeine semi-simpliziale Menge X her, und ein Objekt y aus $\mathcal{E}$. Schreiben Sie die Adjunktionsbeziehung hin für dieses X und dieses y und den gegebenen Funktor F und den noch unbekannten Funktor G. Kann X so gewählt werden, dass Sie daraus etwas Nützliches über $G(y)$ erfahren?*
- Machen Sie G explizit in dem Fall, wo $\mathcal{E}$ die Kategorie der Kettenkomplexe ist und F der Funktor *kombinatorischer Kettenkomplex* (also der Funktor, der eine semi-simplizialen Menge X ihren kombinatorischen Kettenkomplex $C(X)$ zuordnet).

12. Gegeben seien stetige injektive Abbildungen $f\colon S^2 \to S^6$ und $g\colon S^2 \to S^6$ mit der Eigenschaft $f(S^2) \cap g(S^2) = \emptyset$. Zeigen Sie: es gibt keine stetige Abbildung

$$u\colon S^6 \smallsetminus f(S^2) \longrightarrow g(S^2)$$

mit der Eigenschaft $u(g(x)) = g(x)$ für alle $x \in S^2$. (*Zum Vergleich: es ist nicht besonders schwer, stetige injektive Abbildungen* $f, g\colon S^2 \to S^5$ *mit der Eigenschaft* $f(S^2) \cap g(S^2) = \emptyset$ *zu konstruieren und eine stetige Abbildung* $u\colon S^5 \smallsetminus f(S^2) \to g(S^2)$ *mit der Eigenschaft* $u(g(x)) = g(x)$ *für alle* $x \in S^2$.)

13. Sei X ein nichtleerer Raum. Den Join $X * S^0$ kann man sich (wenn man überhaupt weiss, was "Join" ist) auch so vorstellen: er ist der Quotientenraum von $X \times [-1, 1]$, der entsteht, wenn alle Punkte der Form $(x, -1)$ miteinander identifizert werden und alle Punkte der Form $(x, +1)$ miteinander identifiziert werden. (*Da ich den Join nie offiziell eingeführt habe, muss ich leider davon absehen, aus dieser Behauptung einen Aufgabenteil zu machen.*) Man zeige auf dieser Grundlage, dass

$$\tilde{H}_q(X) \cong \tilde{H}_{q+1}(X * S^0)$$

ist für alle $q \in \mathbb{Z}$. Dabei bezeichnet $\tilde{H}$ die reduzierte Homologie. (Sie wurde im Beweis von Prop 8.4.2 kurz eingeführt.)

14. Zeigen: es gibt eine stetige Abbildung $\sigma\colon \Delta^3 \to S^3$ derart, dass σ als Element vom singulären Kettenkomplex $sC(S^3)$ ein Zykel ist, und ausserdem als solcher die Homologieklasse $1 \in \mathbb{Z} \cong H_3(S^3)$ repräsentiert. (*Hinweis: suchen Sie Anregungen in Kapitel 8.*) Geht das auch mit Δ^2 und S^2 anstelle von Δ^3 und S^3 ?