07.12.2017

9. Übungsblatt
Topologie WS 2017/18 (Weiss)

In diesen Aufgaben geht es in erster Linie darum, zu zeigen, dass die zwei Definitionen von $\deg(f)$*, die wir jetzt für stetige Abbildungen* $f\colon S^1 \to S^1$ *haben, übereinstimmen.*

1. Sei $\sigma\colon \Delta^1 \to S^1$ die stetige Abbildung definiert in baryzentrischen Koordinaten durch

$$\Delta^1 \ni (x_0, x_1) \;\mapsto\; \exp(2\pi i x_1) \in S^1 \subset \mathbb{C}\,.$$

Dann kann σ wie üblich als Element von $sC(S^1)_1$ aufgefasst werden.[1]

a) Zeigen, dass σ sogar ein 1-Zykel im Kettenkomplex $sC(S^1)$ ist.

b) Zeigen, dass die Homologieklasse $[\sigma]$ ein Erzeuger von $H_1(S^1)$ ist (also unter einem beliebigen Isomorphismus von $H_1(S^1)$ nach $\mathbb{Z}$ auf ± 1 abgebildet wird — wir wissen ja schon, dass so ein Isomorphismus existiert).[2]

2. (*Hier darf Aufgabe 1 benutzt werden, auch wenn sie nicht oder nur teilweise gemacht worden ist.*) Sei $n \in \mathbb{Z}$ fest und sei $f\colon S^1 \to S^1$ die stetige Abbildung gegeben durch $f(z) = z^n$ (in komplexer Schreibweise). Mit σ wie in Aufgabe 1 haben wir $f \circ \sigma\colon \Delta^1 \to S^1$. So kann auch $f \circ \sigma$ als Element von $sC(S^1)_1$ aufgefasst werden.

a) Zeigen, dass $f \circ \sigma$ sogar ein 1-Zykel ist.

b) Zeigen, dass $[f \circ \sigma] = n[\sigma] \in H_1(S^1)$.

c) Daraus schliessen, dass $f_*\colon H_1(S^1) \to H_1(S^1)$ dasselbe ist wie Multiplikation mit n.

Zur Abgabe: alle Aufgaben (bis 8:15 am Do 14.12. in den dafür vorgesehenen Briefkästen). Punkte dafür: 2+8, 1+8+1.

---

[1] Zur Erinnerung: $sC(X)_n$ ist die freie abelsche Gruppe erzeugt von der Menge der stetigen Abbildungen von Δ^n nach X.

[2] Vorschlag oder Hinweis: Beweis von Prop 7.2.1 nochmal genau angucken. Es läuft darauf hinaus, dass Sie das Bild von $[\sigma]$ unter $\partial\colon H_1(S^1) \to H_0(V) \oplus H_0(W)$ aus der langen exakten MV-Folge bestimmen. Und das läuft wahrscheinlich darauf hinaus, dass Sie sich nochmal genau angucken, wie dieses ∂ definiert war. Das ist natürlich gut für Sie. — Es gibt noch eine andere Methode. Sie könnten Abschnitt 7.4 benutzen, Homologie von Paaren. Sei $V = S^1 \smallsetminus e_2$, wobei $e_2 = (0,1) \in S^1$. Dann sollten Sie erstmal zeigen, dass die Inklusion $(S^1, \emptyset) \to (S^1, V)$ einen Isomorphismus in H_1 (für Paare) induziert. Danach müssten Sie sich mit $H_1(S^1, V)$ herumschlagen und mit 1-Zykeln in $sC(S^1, V) = sC(S^1)/sC(V)$. Hier kann man aber gut das Ausschneidungsaxiom Thm 7.4.5 benutzen, um die Situation zu vereinfachen.