24.11.2017

7. Übungsblatt
Topologie WS 2017/18 (Weiss)

Diese Aufgaben sollen die Formeln in Kapitel 6 der Vorlesungsnotizen (Beweise von Thm 6.2.1 und Prop 6.3.1.) etwas verständlicher machen.

1. Für eine ganze Zahl $p \geq 0$ sei die Menge $[p] \times [1] = \{0, 1, \ldots, p\} \times \{0, 1\}$ mit der partiellen Ordnung " $\leq$ " versehen, bei der $(x, y) \leq (x', y')$ gilt genau dann, wenn $x \leq x'$ in $[p]$ und $y \leq y'$ in $[1]$. Sei $X(p)$ die folgende semi-simpliziale Menge.

- $X(p)_n = \{u \colon [n] \to [p] \times [1] \mid u \text{ ist injektiv und monoton}\}$ (wobei u *ist monoton* bedeuten soll, dass $u(a) \leq u(b)$ falls $a \leq b$);
- für injektives monotones $f \colon [m] \to [n]$ ist $f^* \colon X(p)_n \to X(p)_m$ gegeben durch Zusammensetzen mit f, also $u \mapsto uf$.

a) Skizzen von $|X(1)|$ und $|X(2)|$ anfertigen, in denen die Bilder der charakteristischen Abbildungen c_y erkennbar sind. (Siehe Vorlesungsnotizen Abschnitt 4.2, speziell Seiten 27-28.)
b) Abbildung von $|X(p)|$ nach $\Delta^p \times [0, 1]$ erfinden, die eine Chance hat, ein Homöomorphismus zu sein.
c) Zeigen, dass die Abbildung aus b) tatsächlich ein Homöomorphismus ist.[1]

2. Für eine ganze Zahl $p \geq 0$ sei $Y(p)$ die folgende semi-simpliziale Menge.

- Die Elemente von $Y(p)_n$ sind die strikt aufsteigenden Folgen
$$S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n$$
von nichtleeren Teilmengen von $[p]$.
- Für ein monotones injektives $f \colon [m] \to [n]$ ist $f^* \colon Y(p)_n \to Y(p)_m$ definiert durch
$$f^*(S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n) = (S_{f(0)} \subset S_{f(1)} \subset S_{f(2)} \subset \cdots \subset S_{f(m)}) \,.$$

a) Skizze von $|Y(2)|$ anfertigen, in der die Bilder der charakteristischen Abbildungen c_y erkennbar sind.
b) Zeigen, dass die geometrische Realisierung $|Y(p)|$ homöomorph ist zu Δ^p.

3. (*Nicht zur Abgabe; darf aber in den Übungsgruppen besprochen werden.*) Die Konstruktionen in Aufgaben 1 und 2 können verallgemeinert werden.

---

[1] Obwohl ich die Aufgabe schon enorm zusammengestrichen habe, ist sie wahrscheinlich wieder nicht ganz einfach. Man kann auch mit einem Ansatz, der vernünftig aussieht, Pech haben. Ich habe es ausprobiert. Deswegen ein paar Empfehlungen. *Erstens*: Reihenfolge einhalten; erst a), dann b), dann c). *Zweitens*: zu Teil c). Das Ziel der Abbildung in b), also $\Delta^p \times [0, 1]$, sollte gedanklich zerteilt, in Stücke zerschnitten werden, denn die Quelle $|X(p)|$ ist aus Stücken zusammengeklebt. Wie wird $\Delta^p \times [0, 1]$ zerschnitten? Durch Graphen von linearen Abbildungen von Δ^p nach $[0, 1]$. (Sie wissen ja, was ich mit einer linearen Abbildung von Δ^p nach $[0, 1]$ meine.) Was sollen das für lineare Abbildungen sein? Kann man sie miteinander vergleichen, der Grösse nach anordnen?

Gegeben eine semi-simpliziale Menge K; dann kann man eine semi-simpliziale Menge $K^!$ definieren (in Anlehnung an Aufgabe 1), so dass $|K^!|$ homöomorph ist zu $|K| \times [0,1]$.

Noch allgemeiner: gegeben zwei semi-simpliziale Mengen K und L; dann kann man eine semi-simpliziale Menge definieren, die ich $K \boxtimes L$ nenne, und $|K \boxtimes L|$ ist homöomorph zu $|K| \times |L|$ unter schwachen Bedingungen. (Ein hinreichende Bedingung ist, dass L endlich ist, also jede Menge L_n endlich und nur für endlich viele n von $\emptyset$ verschieden.) Aufgabe 1 ist der Spezialfall $K = \underline{\Delta}^p$ und $L = \underline{\Delta}^1$. Bezeichnungen wie in Expl 4.2.4., Vorlesungsnotizen.

Gegeben semi-simpliziale Menge Z; dann kann man eine semi-simpliziale Menge Z' definieren (in Anlehnung an Aufgabe 2), die sich die baryzentrische Unterteilung von Z nennen darf. Dabei ist $|Z'|$ homöomorph zu $|Z|$.

Zur Abgabe: Aufgaben 1 und 2 (bis 8:15 am Do 30.11. in den dafür vorgesehenen Briefkästen). Punkte dafür: 2+4+6, 2+6.