16.11.2017

6. Übungsblatt
Topologie WS 2017/18 (Weiss)

1. Die semi-simpliziale Menge $\underline{\Delta}^n$ ist beschrieben in Example 4.2.4 und der zugehörige Kettenkomplex $C(\underline{\Delta}^n)$ ist ein Spezialfall von Example 5.1.3. Zeigen, dass $C(\underline{\Delta}^n)$ kettenhomotopieäquivalent ist zum Kettenkomplex B, der durch $B_0 = \mathbb{Z}$ und $B_j = 0$ für $j \neq 0$ bestimmt ist. (Siehe auch Example 5.2.5.)

2. Ein Kettenkomplex C soll *elementar* heissen (in dieser Aufgabe), wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt derart, dass $C_r = 0$ falls $r \notin \{n, n+1\}$, und $d_{n+1} \colon C_{n+1} \to C_n$ injektiv ist.

a) Sei E ein Kettenkomplex mit der Eigenschaft, dass jedes E_r eine freie abelsche Gruppe ist. Zeigen: E ist isomorph zu einer direkten Summe von elementaren Kettenkomplexen.[1]

b) Mit Bedingungen wie in a): wenn ausserdem $H_n(E) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, dann ist E zusammenziehbar (das heisst, die Identität $E \to E$ ist kettenhomotop zur Nullabbildung $E \to E$).

c) Zu jedem Kettenkomplex F gibt es einen Kettenkomplex E mit der Eigenschaft, dass jedes E_r eine freie abelsche Gruppe ist, und eine Kettenabbildung $g \colon E \to F$ derart, dass $g_* \colon H_n(E) \to H_n(F)$ ein Isomorphismus ist für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

3. Sei $A \to B \to C$ eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen. Angenommen, $\bigoplus_n H_n(A)$ und $\bigoplus_n H_n(C)$ sind endlich erzeugt als abelsche Gruppen.[2] Dann ist auch $\bigoplus_n H_n(B)$ endlich erzeugt, und für die Eulercharakteristiken gilt $\chi(B) = \chi(A) + \chi(C)$.

Alles zur Abgabe (bis 8:15 am Do 23.11. in den dafür vorgesehenen Briefkästen). Punkte dafür: 6, 6+3+2, 3.

[1] Dazu sollten Sie dies und das über freie abelsche Gruppen wissen.

[2] Gleichbedeutend: $H_n(A)$ und $H_n(C)$ sind endlich erzeugt, für alle $n \in \mathbb{Z}$, und nur endlich viele von ihnen sind $\neq 0$.