30.10.2017

2. Übungsblatt: Lösungen
Topologie WS 2017/18 (Weiss)

1. Sei $E \subset S^1 \times \mathbb{C}$ das Möbiusband, das heisst, die Teilmenge bestehend aus allen (z, w), die $w^2 = c^2 z$ für irgendein $c \in \mathbb{R}$ erfüllen. Siehe Beispiel 2.1.5 in Vorlesungsnotizen.

a) Zeigen, dass die Abbildung $q\colon E \to S^1$ gegeben durch $q(z, w) = z$ tatsächlich ein Faserbündel ist.
b) Zeigen, dass dieses Faserbündel nicht trivial ist.

Lösung. a) Wir schreiben $S^1 = U \cup V$ mit $U = S^1 \smallsetminus \{-1\}$ und $V = S^1 \smallsetminus \{1\}$. Ein Homöomorphismus $U \times \mathbb{R} \longrightarrow q^{-1}(U)$ ist gegeben durch

$$(\exp(\pi i s), t) \mapsto (\exp(\pi i s), t \exp(\pi i s/2))$$

wobei s das offene Intervall von -1 bis 1 durchlaufen soll. Ein Homöomorphismus $V \times \mathbb{R} \longrightarrow q^{-1}(V)$ ist gegeben durch

$$(-\exp(\pi i s), t) \mapsto (-\exp(\pi i s), t i \exp(\pi i s/2))$$

wobei wieder s das offene Intervall von -1 bis 1 durchlaufen soll. Die Inversen dieser beiden Homöomorphismen sind Bündelkarten für q.

b) Wenn es trivial wäre, dann müsste für jeden Schnitt σ von q (also stetiges $\sigma\colon S^1 \to E$ mit $q \circ \sigma = \mathrm{id}$) das Komplement vom Bild von σ zwei Wegzusammenhangskomponenten haben. Das ist aber nicht der Fall für den Schnitt σ definiert durch $\sigma(z) = (z, 0) \in E$. Denn hier besteht das Komplement vom Bild aus allen (z, w) mit $w^2 = cz$ für ein positives $c \in \mathbb{R}$. Es ist leicht zu sehen, dass das homotopieäquivalent ist zur Menge aller Paare $(z, w) \in E$ mit $w^2 = z$. Diese ist aber wiederum homöomorph zur Menge aller $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$, also zu S^1. Also nur eine Wegzusammenhangskomponente.

Dieses Argument drückt übrigens nur mathematisch aus, wofür das Möbiusband ohnehin berühmt ist: wenn man es längs der Mittellinie zerschneidet, dann zerfällt es nicht in zwei Teile, sondern bleibt zusammenhängend.

2. Sei $E = \{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in S^{m-1} \times S^{m-1} \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0\}$. Dabei ist S^{m-1} die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^m$ und $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ bezeichnet das gewöhnliche Skalarprodukt von Vektoren in $\mathbb{R}^m$. Ausserdem wird E als Unterraum von $S^{m-1} \times S^{m-1}$ topologisiert.

a) Zeigen, dass die Abbildung $p\colon E \to S^{m-1}$ gegeben durch $p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}$ ein Faserbündel ist.
b) Wenn m gerade ist, besitzt dieses Faserbündel einen *Schnitt*, d.h. es existiert stetiges $\sigma\colon S^{m-1} \to E$ derart, dass $p \circ \sigma = \mathrm{id}$. Warum?
c) Wenn $m = 2$ oder $m = 4$ oder $m = 8$, dann ist dieses Faserbündel trivial. Warum?

Lösung. (Aber ohne fettgedruckte Vektoren.)

a) Wir schreiben $S^{m-1} = U \cup V$ wobei $U = S^{m-1} \smallsetminus \{-e_1\}$ und $V = S^{m-1} \smallsetminus \{e_1\}$. Hier ist $e_1 \in \mathbb{R}^m$ der erste Standardbasisvektor. Für jedes $v \in U$ sei $A_v \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ die eindeutige lineare Isometrie (alias orthogonale Matrix), die e_1 auf v abbildet, alle Vektoren im orthogonalen Komplement von $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}v$ (linearer Unterraum von $\mathbb{R}^m$) festlässt, und ausserdem Determinante $+1$ hat. Dann haben wir einen Homöomorphismus

$$U \times p^{-1}(e_1) \to p^{-1}(U)$$

durch $(v, w) \mapsto (v, A_v(w))$. (Denn wenn $w \in p^{-1}(e_1)$, dann heisst das $w \perp e_1$; also $A_v(w) \perp A_v(e_1)$, also $A_v(w) \perp v$.) Das Inverse davon ist eine Bündelkarte für p.

Für jedes $v \in V$ sei $B_v \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ die eindeutige lineare Isometrie, die $-e_1$ auf v abbildet, alle Vektoren im orthogonalen Komplement von $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}v$ festlässt, und ausserdem Determinante $+1$ hat. Dann haben wir einen Homöomorphismus

$$V \times p^{-1}(-e_1) \to p^{-1}(V)$$

durch $(v, w) \mapsto (v, B_v(w))$. Das Inverse davon ist wieder eine Bündelkarte für p.

b) Wir können definieren $\sigma(v) = (v, iv) \in E$. Das ist sinnvoll, weil S^{m-1} die Einheitssphäre in $\mathbb{C}^{m/2}$ ist.

c) Sei F die Faser von $p \colon E \to S^{m-1}$ über $e_1 \in S^{m-1}$. Wir machen eine Trivialisierung von der Form

$$S^{m-1} \times F \longrightarrow E\ ;\ (v, w) \mapsto (v, vw)$$

wobei der Ausdruck vw in der rechten Seite andeutet, dass wir ein Produkt

$$\mu \colon S^{m-1} \times S^{m-1} \to S^{m-1}$$

benutzen. Im Fall $m = 2$ ist S^1 die Einheitssphäre in $\mathbb{C}$, und wir können die Multiplikation in $\mathbb{C}$ benutzen. Im Fall $m = 4$ benutzen wir die Multiplikation in den Hamiltonschen Quaternionen. Im Fall $m = 8$ benutzen wir die Multiplikation in den Cayley-Oktonionen. (Einzelheiten bei Wikipedia.) Etwas problematisch dabei: wir wollen wissen, dass $v \perp vw$ ist, falls $w \in F$, also falls $e_1 \perp w$. (Dabei spielt e_1 die Rolle des Einselementes in $\mathbb{C}$ bzw Quaternionen bzw Oktonionen.) Also genügt es, zu wissen, das Linksmultiplikation mit beliebigem $v \in S^{m-1}$ eine orthogonale Abbildung ist. Da diese Abbildung $\mathbb{R}$-linear ist, genügt es zu wissen, dass sie eine Isometrie ist (normerhaltend für die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^m$). Das folgt aus dem Gesetz $\|a\| \cdot \|b\| = \|a \cdot b\|$, das für diese Multiplikationen gilt. (Das ist vielleicht nicht selbstverständlich, aber irgendwie bekannt, hoffe ich.)

3. Durch Anwenden von Korollar 2.4.4. auf das Beispiel 2.1.6 in Vorlesungsnotizen (Hopf-Faserung $S^3 \to S^2$) soll gezeigt werden, dass die Sphäre S^2 *nicht* zusammenziehbar ist.[1]

---

[1] Zum Beweis von Korollar 2.4.4. kommen wir wohl erst in der dritten Vorlesungswoche. Andere unbewiesene Sätze usw. sollten lieber nicht benutzt werden. So elementar wie möglich argumentieren!

Eine Lösung. Sei $p\colon S^3 \to S^2$ die Hopf-Faserung (damit wir einen kurzen Namen dafür haben). Erstmal bemerken wir: die Inklusion einer (gewissen) Faser in S^3 ist nullhomotop (homotop zu einer konstanten Abbildung). Es genügt mir, das für eine Faser zu beweisen. Nehmen wir also die Faser F über $0 \in \mathbb{C} \cup \infty = S^2$; sie besteht aus allen Paaren $(z, w) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ mit $z = 0$. Das ist der Kreis bestehend aus allen $(0, w)$ mit $|w| = 1$. Eine Homotopie von der Inklusion $F \to S^3$ zu einer konstanten Abbildung können wir machen etwa durch

$$h_t(0, w) = (t, (\sqrt{1 - t^2}\, w)$$

wobei $t \in [0, 1]$.

Korollar 2.4.4. sagt uns: wenn S^2 zusammenziehbar ist, dann gibt es einen Homöomorphismus g von $S^2 \times S^1$ nach S^3. Wir können ausserdem verlangen $p \circ g =$ erste Projektion (von $S^2 \times S^1$ nach S^2). Dann wissen wir wegen der vorigen Bemerkung noch etwas mehr: g eingeschränkt auf $\{z\} \times S^1$ ist nullhomotop (wobei z ausgewählter Punkt in S^2). Dann ist auch $g^{-1} \circ g$ eingeschränkt auf $\{z\} \times S^1$ nullhomotop. Daraus folgt (durch Zusammenstezen mit der zweiten Projektion $S^2 \times S^1 \to S^1$), dass die Identitätsabbildung von S^1 nach S^1 nullhomotop ist. Wir wissen aber schon (aus Kapitel 1 der Vorlesungsnotizen), dass das nicht stimmt.

Etwas andere Lösung. Korollar 2.4.4. sagt uns: wenn S^2 zusammenziehbar ist, dann gibt es einen Homöomorphismus g von $S^2 \times S^1$ nach S^3. Andererseits: wenn S^2 zusammenziehbar ist, dann ist p automatisch nullhomotop. Dann können wir, wie in Vorlesungsnotizen aufgeschrieben, schliessen, das S^3 zusammenziehbar ist. Demnach ist auch $S^2 \times S^1$ zusammenziehbar, weil homöomorph zu S^3. Daraus folgt leicht, dass S^1 zusammenziehbar ist. Wir wissen aber schon (aus Kapitel 1 der Vorlesungsnotizen), dass das nicht stimmt.