19.10.2017

2. Übungsblatt
Topologie WS 2017/18 (Weiss)

1. Sei $E \subset S^1 \times \mathbb{C}$ das Möbiusband, das heisst, die Teilmenge bestehend aus allen (z, w), die $w^2 = c^2 z$ für irgendein $c \in \mathbb{R}$ erfüllen. Siehe Beispiel 2.1.5 in Vorlesungsnotizen.

a) Zeigen, dass die Abbildung $q \colon E \to S^1$ gegeben durch $q(z, w) = z$ tatsächlich ein Faserbündel ist.
b) Zeigen, dass dieses Faserbündel nicht trivial ist.

2. Sei $E = \{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in S^{m-1} \times S^{m-1} \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0\}$. Dabei ist S^{m-1} die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^m$ und $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ bezeichnet das gewöhnliche Skalarprodukt von Vektoren in $\mathbb{R}^m$. Ausserdem wird E als Unterraum von $S^{m-1} \times S^{m-1}$ topologisiert.

a) Zeigen, dass die Abbildung $p \colon E \to S^{m-1}$ gegeben durch $p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}$ ein Faserbündel ist.
b) Wenn m gerade ist, besitzt dieses Faserbündel einen *Schnitt*, d.h. es existiert stetiges $\sigma \colon S^{m-1} \to E$ derart, dass $p \circ \sigma = \mathrm{id}$. Warum?
c) Wenn $m = 2$ oder $m = 4$ oder $m = 8$, dann ist dieses Faserbündel trivial. Warum?

3. Durch Anwenden von Korollar 2.4.4. auf das Beispiel 2.1.6 in Vorlesungsnotizen (Hopf-Faserung $S^3 \to S^2$) soll gezeigt werden, dass die Sphäre S^2 *nicht* zusammenziehbar ist.[1]

Alles zur Abgabe (bis 8:15 am Do 26.10. in den dafür vorgesehenen Briefkästen). Punkte dafür: 3+2, 3+3+3, 6.

[1] Zum Beweis von Korollar 2.4.4. kommen wir wohl erst in der dritten Vorlesungswoche. Andere unbewiesene Sätze usw. sollten lieber nicht benutzt werden. So elementar wie möglich argumentieren!