10.10.2017

1. Übungsblatt
Topologie WS 2013/14 (Weiss)

1. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) X ist zusammenziehbar (contractible).
(ii) $X \neq \emptyset$ und $[X, X]$ hat genau ein Element.
(iii) für jeden topologischen Raum Y hat $[Y, X]$ genau ein Element.

2. Gegeben topologische Räume X und Y. Angenommen, X besitzt eine Überdeckung durch offene Teilmengen U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 mit der Eigenschaft, dass die Inklusion $U_i \to X$ homotop ist zu einer konstanten Abbildung (für $i = 1, 2, 3, 4, 5$). Zeigen Sie: wenn Y homotopieäquivalent zu X ist, dann besitzt auch Y eine Überdeckung durch offene Teilmengen V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 mit der Eigenschaft, dass die Inklusion $V_i \to Y$ homotop ist zu einer konstanten Abbildung (für $i = 1, 2, 3, 4, 5$).

3. Sei S^2 die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$. Sei $f\colon S^2 \to S^2$ eine stetige Abbildung mit der folgenden Eigenschaft. Es existiert eine nichtleere offene Teilmenge U von S^2 derart, dass $f(x) = x$ für alle $x \in U$ und $f(x) \notin U$ für alle $x \in S^2 \smallsetminus U$. Zeigen Sie, dass f homotop zu $\mathrm{id}\colon S^2 \to S^2$ ist.

4. Sei $a = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ und $b = (-1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Sei $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{a, b\}$ und $Y = \{\, c \in \mathbb{R}^2 \mid \|c - a\| = 1 \text{ oder } \|c - b\| = 1 \}$. Bild von Y machen. Zeigen, dass die Inklusion $Y \to X$ eine Homotopieäquivalenz ist. (Dabei sollen X und Y topologisiert werden als Unterräume von $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen Topologie.)

Zur Diskussion in den Übungsgruppen: Aufgabe 4. Zur Abgabe (bis 8:15 am Do 19.10. in den dafür vorgesehenen Briefkästen): Aufgaben 1,2,3. Punkte dafür: 4, 7, 9. Es soll immer 20 Punkte pro Übungsblatt geben.