11.01.2018

12. Übungsblatt
Topologie WS 2017/18 (Weiss)

1. (*Alte Klausuraufgabe.*) Sei Y ein topologischer Raum und sei $\mathsf{j} \in \mathbb{Z}$. Es soll gezeigt werden, dass

$$\mathsf{H}_\mathsf{j}(\mathsf{Y} \times \mathsf{S}^1) \cong \mathsf{H}_\mathsf{j}(\mathsf{Y}) \oplus \mathsf{H}_{\mathsf{j}-1}(\mathsf{Y})\,.$$

(*Anleitung: dazu sollen Sie eine lange exakte Mayer-Vietoris-Folge ansetzen. Und dafür brauchen Sie eine schlau gewählte Überdeckung von* $\mathsf{Y} \times \mathsf{S}^1$ *durch zwei offene Teilmengen* V *und* W*. Denken Sie erstmal über den Fall nach, in dem* Y *nur ein Element hat. Wie würden Sie dann* V *und* W *wählen? Stimmt die Behauptung überhaupt in diesem Fall?*)

2. Gegeben zwei offene Teilmengen X und Y von $\mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft

$$\mathsf{X} \cup \mathsf{Y} = \mathbb{R}^2\,.$$

Angenommen, sowohl X als auch Y sind zusammenhängend. Man beweise, dass $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}$ ebenfalls zusammenhängend ist.
(*Hinweis: es schadet nichts, wenn man sich Gedanken macht über den Unterschied der Definitionen von "zusammenhängend" bzw. "wegzusammenhängend", sowie Spezialfälle, in denen man zeigen kann, dass die beiden Begriffe äquivalent sind.*)

4. a) Gegeben eine offene Menge V in $\mathbb{R}^\mathsf{m}$ und eine stetige *injektive* Abbildung $\mathsf{g}\colon \mathsf{V} \to \mathbb{R}^\mathsf{m}$. Dann ist $\mathsf{g}(\mathsf{V})$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^\mathsf{m}$.
(*Leiten sie das mal aus Thm 8.5.1 her. Man könnte fast meinen, es steht da schon, aber ich glaube, da muss noch ein bisschen argumentiert werden.*)

b) Jede injektive stetige Abbildung $\mathsf{f}\colon \mathsf{S}^2 \to \mathsf{S}^2$ ist surjektiv, und damit ein Homöomorphismus. (*Bitte auch erklären, warum injektiv und surjektiv hier "Homöomorphismus" zur Folge hat.*)

Zur Abgabe: alle Aufgaben (bis 8:15 am Do 18.1.2018 in den dafür vorgesehenen Briefkästen). Punkte dafür: 12, 3, 3+2.