22.12.2017

11. Übungsblatt
Topologie WS 2017/18 (Weiss)

1. Sei X eine semi-simpliziale Menge. Sei $(a(t))_{t=0,1,\dots}$ eine Folge in $|X|$. Jedes $a(t)$ kann (wie in Lemma 4.3.2 der Vorlesungsnotizen) eindeutig geschrieben werden in der Form

$$a(t) = c_{z(t)}(w(t))$$

mit $z(t) \in X_{r(t)}$ und $w(t) \in \Delta^{r(t)} \smallsetminus \partial\Delta^{r(t)}$, wobei $c_{z(t)}\colon \Delta^{r(t)} \to |X|$ die charakteristische Abbildung für $z(t)$ ist. — Zeigen: wenn die $z(t)$ paarweise verschieden sind, dann ist $\{a(0), a(1), a(2), \dots\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $|X|$.

2. Sei X eine semi-simpliziale Menge und sei $C(X)$ der kombinatorische Kettenkomplex von X. Für $r \geq 0$ ist also $C(X)_r$ die freie abelsche Gruppe erzeugt von der Menge X_r. (Man kann auch sagen: X_r ist eine $\mathbb{Z}$-*Basis* von $C(X)_r$.) Wir nehmen jetzt an, dass X_r endlich ist für alle $r \geq 0$. Dann kann $d\colon C(X)_r \to C(X)_{r-1}$ durch eine Matrix $M(r)$ beschrieben werden (unter Benutzung der gegebenen Basen, die dazu allerdings durchnummeriert werden muüssen).

(i) Zeigen, dass das Produkt $M(r-1)M(r)$ definiert ist und dass es eine Nullmatrix ist.

(ii) Ist es richtig, dass die Einträge der Matrix $M(r)$ sämtlich aus der Menge $\{0, 1, -1\}$ kommen müssen? Falls nicht, gibt es eine obere Schranke und eine untere Schranke für die Einträge von $M(r)$, bei festem r ?

3. In Aufgabe 3 von Übungsblatt 4 wurde eine semi-simpliziale Menge Y betrachtet oder angepriesen, die folgende Eigenschaften hat:

- die Menge Y_3 hat genau ein Element;
- $|Y|$ ist homöomorph zu S^3.

Beschreiben Sie den (kombinatorischen) Kettenkomplex $C(Y)$ und verifizieren Sie durch direktes Nachrechnen (nicht etwa durch Benutzung von Satz 8.3.1 der Vorlesungsnotizen), dass $H_3(C(Y)) \cong \mathbb{Z} \cong H_0(C(Y))$ und $H_k(C(Y)) = 0$ falls $k \notin \{0, 3\}$. (Zur Beschreibung von $C(Y)$ brauchen Sie eigentlich nur die Matrizen $M(3)$, $M(2)$, $M(1)$, mit Bezeichnungen wie in Aufgabe 2.)

4. Sei X eine nichtleere simpliziale Menge (das heisst, es existiert ein $r \geq 0$, so dass $X_r \neq \emptyset$). Zeigen Sie, dass die Gruppen $sC(|X|)_k$ für $k \geq 0$ sämtlich freie abelsche Gruppen mit einer überabzahlbaren $\mathbb{Z}$-Basis sind. (Hier bezeichnet $sC(Y)$ den singulären Kettenkomplex von Y, wobei Y ein topologischer Raum sein soll.)

Anmerkung 15.1.2018. Fehler in der Aufgabe: hier hätte natürlich stehen sollen "es existiert ein $r \geq 1$, so dass $X_r \neq \emptyset$".

5. (*Aus der Topo I Klausur WS13/14, leicht abgeändert.*) Natürliche Zahlen $n > 0$ und k mit $0 \leq k < n$ sind vorgegeben. Wir schreiben $X := \underline{\Delta}^n$ und Y für das k-*Skelett* von X. Genauer, Y ist die semi-simpliziale Untermenge von X mit $Y_r = X_r$ für $r \leq k$ und $Y_r = \emptyset$ für $r > k$.

In dieser Aufgabe soll die Homologie von $|\mathsf{Y}|$ bestimmt werden. (Sätze, die dabei benutzt werden, sollten sorgfältig zitiert werden.) Man kann $|\mathsf{Y}|$ kurz als das k-Skelett vom Standard-n-Simplex $\Delta^n = |\mathsf{X}|$ beschreiben.

a) Die abelschen Gruppen $\mathsf{C}(\mathsf{Y})_r$ sollen so explizit wie möglich beschrieben werden.
b) Man bestimme die Euler-Charakteristik vom Kettenkomplex $\mathsf{C}(\mathsf{Y})$.
c) Zeigen, dass $\mathsf{H}_j(|\mathsf{Y}|)$ gleich 0 ist, falls $j \neq 0, k$. [Eine Zurückführung auf den Fall $k = n$ wird empfohlen.]
d) Zeigen, dass $\mathsf{H}_k(|\mathsf{Y}|)$ eine freie abelsche Gruppe ist.
e) Man bestimme $\mathsf{H}_0(|\mathsf{Y}|)$.
f) Unter Benutzung von b), c), d) und e) soll $\mathsf{H}_k(|\mathsf{Y}|)$ bestimmt werden.

Zur Abgabe: alle Aufgaben (bis 8:15 am Do 11.1.2018 in den dafür vorgesehenen Briefkästen). Punkte dafür: 3, 1+2, 4, 1, 1+2+2+1+1+2.