Topologie I WS 2017/18
(Weiss)

(Stand: 9.10.2017.)

Vorlesungen, Übungen, Übungsaufgaben, wann und wo. Di, Do 08:00-10:00 in M3. Übungen finden statt, 2 Wochenstunden pro Person. Zeiten dafür: noch nicht bekannt. Es gibt wöchentlich Übungsaufgaben, mit Abgabe und Korrektur. Abgabe zu zweit wird erlaubt. Briefkästen dafür: noch nicht bekannt.

Themen. Es soll in diesem Kurs in erster Linie um *algebraische Topologie* gehen. Die algebraische Topologie ist fast im Alleingang von Henri Poincaré begründet worden, ein paar Jahre vor 1900. Bei dieser Begründung stand die Homologietheorie im Vordergrund. Das ist heute immer noch so: die Homologietheorie ist der wichtigste Teil der algebraischen Topologie. Sie hatte damals allerdings nicht diesen Namen. Poincaré schrieb etwas über eine Folge von ganzen Zahlen, die man mit einem topologischen Raum X assoziieren konnte, die Folge der Betti-Zahlen von X. Wenn topologische Räume X und Y homöomorph sind, dass bestimmen sie dieselbe Folge von Betti-Zahlen. (So hat es Poincaré nicht ausgedrückt, und es ist nicht ganz klar, ob er das wusste; er hatte auch nicht den Begriff des topologischen Raumes, den es damals in voller Allgemeinheit nicht gab, sondern arbeitete mit ziemlich speziellen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.) Seitdem haben sich folgende Ansichten durchgesetzt.

- Noch wichtiger als die Bettizahlem eines topologischen Raumes X sind gewisse kommutative Gruppen $H_i(X)$, die man mit dem Raum X assoziieren kann. Das sind sie Homologiegruppen von X. Die i-te Bettizahl von X ist eigentlich nur der Rang der kommutativen Gruppe $H_i(X)$. (Der Rang einer kommutativen Gruppe A ist die Dimension des Vektorraumes $A \otimes \mathbb{Q}$ über dem Körper $\mathbb{Q}$, wenn Ihnen das hilft.)
- Homologie ist ein Funktor: eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ bestimmt einen Homomorphismus $H_i(X) \to H_i(Y)$ von kommutativen Gruppen.
- In der Homologietheorie ist nicht so sehr die Beziehung *homöomorph* entscheidend. Stattdessen sind die gröberen Beziehungen *homotopieäquivalent* (für Räume) und *homotop* (für stetige Abbildungen) wichtig. Beispiel: $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ ist homotopieäquivalent zu S^1. Daraus dürfen wir schon schliessen, dass $H_i(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\})$ isomorph ist zu $H_i(S^1)$ für jedes feste $i \geq 0$. Aber: $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ ist nicht homöomorph zu S^1.

Poincaré verliess sich stark auf kombinatorische Methoden. Die Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die er betrachtete, waren meistens Polyeder. Er definierte die Bettizahlen unter Benutzung dieser Zusatzstruktur und bemühte sich danach, zu zeigen, dass sie von der Zusatzstruktur unabhängig sind (was ihm wohl nicht immer gut gelang ... egal, er ahnte es). Diese von Poincaré begründete Tradition ist in der algebraischen Topologie, wie ich finde, bis jetzt beibehalten worden.

Un-Themen. Es geht nicht in erster Linie um Grundbegriffe der mengentheoretischen Topologie, wie Kompaktheit, Zusammenhangseigenschaften, Trennungseigenschaften, Produkttopologie, Quotiententopologie usw. Stattdessen wollen wir so tun, als ob Sie schon viel davon gesehen haben. Wenn das nicht der Fall ist, ist es keine Katastrophe, aber Sie werden sich anstrengen müssen, einiges davon nachzuholen, während dieser Kurs läuft.

Literatur. Bücher zur mengentheoretischen Topologie:

- B. von Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, 3. Aufl., Springer.
- James Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.
- M. A. Armstrong, *Basic Topology*, Springer 1983.
- Klaus Jänich, *Topologie*, 8.Auflage, Springer.
- W. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, 2nd Edition, Oxford University Press.

Mit Ausname von Sutherlands Buch sind diese allesamt ziemlich alt, ohne deswegen veraltet zu sein. Das von Sutherland ist besonders geduldig und behandelt auch nur ein Minimum an Stoff. Das Buch von Querenburg ist ziemlich streng. Das von Dugundji ist sehr umfassend, schön, schliesst auch wohl etwas algebraische Topologie ein, ist aber vielleicht nicht mehr so leicht zu kriegen oder nur für viel Geld (oder in Bibliotheken). Siehe auch:

www.math.cornell.edu/~hatcher/Other/topologybooks.pdf

Bücher zur algebraischen Topologie: Empfehlungen dazu auf der Webseite.

Planung. Die zeitliche Planung für den Kurs ist noch sehr in den Anfängen. Ich habe mir folgende sehr vorläufige Einteilung gemacht:

- 2-3 Wochen elementare Homotopietheorie
- 2-3 Wochen Kombinatorische Konstruktionen von Räumen
- 1 Woche Kettenkomplexe
- 1 Woche Kategorien und Funktoren
- 7 Wochen Homologie

Prüfungen: Noch nicht viel bekannt. Es soll jedenfalls eine Klausur zum Abschluss geben. Wahrscheinlich 2 Termine.

Fernere Zukunft. Im WS18-19 (!) soll es eine weitere Topologie-Vorlesung geben, die auf dieser aufbaut oder genauer, aufbauen darf. Dafür könnte ich auch zuständig sein.