31.01.2015

Zusammenfassung
Topologie WS 2014/15 (Weiss)

1. CW-Räume

Ober-Definition betont: CW-Raum ist ein Raum X mit aufsteigender Folge von Unterräumen X^n, den Skeletten; $X = \bigcup X^n$. Schwache Topologie: Teilmenge von X offen/abgeschlossen genau dann, wenn offen/abgeschlossen in jedem X^n. Differenz $X^n \setminus X^{n-1}$ ist topologisch disjunkte Vereinigung von Kopien von $\mathbb{R}^n$.

Zelluläre Approximation: Jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen CW-Räumen ist homotop zu zellulärer Abbildung g (so dass $g(X^n) \subset Y^n$ für alle n). Wenn f schon zellulär auf CW-Unterraum $A \subset X$ ist, dann kann Homotopie $(h_t)_{t\in[0,1]}$ so gefunden werden, dass stationär (unabhängig von t) in A. Spezialfall: Wenn zwei zelluläre Abbildungen homotop sind, dann gibt es eine zelluläre Homotopie.

Homotopie-Erweiterungseigenschaft (englisch HEP) für Inklusion von CW-Unterraum $A \to X$.

2. Elementare homologische Algebra von Kettenkomplexen

Wichtige Definitionen: Kettenkomplex (von abelschen Gruppen), Abbildung zwischen Kettenkomplexen, Homotopie zwischen Abbildungen von Kettenkomplexen. Homologie von Kettenkomplexen.

Wichtige Tatsachen: Homologie (von Kettenkomplexen) ist ein Funktor. Homotope Kettenabbildungen induzieren gleiche Homomorphismen in Homologie.

Lange exakte Folge von Homologiegruppen einer kurzen exakten Folge von Kettenkomplexen $0 \to A \to B \to C \to 0$. Variante/Anwendung: Für einen Kettenkomplex E mit Unter-Kettenkomplexen A und B so dass $A + B = E$ gibt es lange exakte Mayer-Vietoris-Folge von Homologiegruppen.

Fünferlemma (five lemma).

Weitere wichtige Definition: Tensorprodukt von Kettenkomplexen. Merkwürdige Vorzeichenregel bei Differential/Randoperator.

Bemerkung: eine Kettenhomotopie h zwischen Kettenabbildungen

$$f, g\colon C \to D$$

kann verstanden werden als Kettenabbildung von $C \otimes I \to D$ für einen gewissen Kettenkomplex I. (Wie sieht I aus?)

3. Abbildungskegel, LES in Homologie und HEP

Für $f\colon A \to X$ hat man $\mathrm{cone}(A \to X) = X /\!\!/ A$, den Abbildungskegel. Im wesentlichen als Spezialfall von Mayer-Vietoris-Folge erhält man lange exakte Folge von Homologiegruppen, die $H_k(A)$, $H_k(X)$ und $\tilde{H}_k(X /\!\!/ A)$ für alle k miteinander verbindet. (Geht auch mit durchweg reduzierten Homologiegruppen, wenn A, X nichtleer.)
Diese Tatsache ist in diesem Kurs etwas unterbetont worden. Im Geist der singulären Homologietheorie würde man schreiben $H_k(X, A)$ (Homologie von Paaren) statt $\tilde{H}_k(X /\!\!/ A)$; das kann hier als Definition von $H_k(X, A)$ genommen werden. Dazu der wichtige (aber für uns eher leichte) Ausschneidungssatz: sei X normal, und gegeben $L \subset A$ derart, dass Abschluss von L enthalten im Inneren von A. Dann ist die Inklusion $(X \smallsetminus L) /\!\!/ (A \smallsetminus L) \to X /\!\!/ A$ eine Homotopieäquivalenz, daher

$$\tilde{H}_k(X /\!\!/ A) \cong \tilde{H}_k((X \smallsetminus L) /\!\!/ (A \smallsetminus L)).$$

(Diesen Isomorphismus gibt es auch ohne Annahme X normal; dann ist er aber schwerer zu beweisen.)

Beispiel von Berechnung von $\tilde{H}_k(S^n)$ mit dieser Methode: wähle kleine offene Scheibe A und abgeschlossene Scheibe L mit $L \subset A \subset S^n$ (also $A \cong \mathbb{R}^n$ und $L \cong D^n$). Wegen langer exakter Folge ist

$$\tilde{H}_k(S^n) \cong \tilde{H}_k(S^n /\!\!/ A).$$

Wegen Ausschneidung ist $\tilde{H}_k(S^n /\!\!/ A) \cong \tilde{H}_k((S^n \smallsetminus L) /\!\!/ (A \smallsetminus L))$. Wegen langer exakter Folge ist

$$\tilde{H}_k((S^n \smallsetminus L) /\!\!/ (A \smallsetminus L)) \cong \tilde{H}_{k-1}(A \smallsetminus L)\,.$$

Da $A \smallsetminus L \simeq S^{n-1}$, haben wir damit einen Induktionsschritt gemacht.

Wichtig: wenn A abgeschl Unterraum von X und $A \to X$ Kofaserung ist (=HEP hat), dann ist die Projektion $X /\!\!/ A \to X/A$ eine Homotopieäquivalenz ... also wieder LES aus Homologiegruppen $H_*(A)$, $H_*(X)$ und $\tilde{H}_*(X/A)$.

4. Zellulärer Kettenkomplex von CW-Raum

Definition von zellulärem Kettenkomplex von CW-Raum X: offizielle Form

$$\cdots \to \tilde{H}_n(X^n/X^{n-1}) \to \tilde{H}_n(X^n/X^{n-1}) \to \cdots$$

Inoffiziell: wähle charakteristische Abbildungen $\varphi\colon D^n \to X^n$ für alle Zellen; dann wird

$$\tilde{H}_n(X^n/X^{n-1}) \cong \bigoplus \mathbb{Z}$$

mit einem Summanden $\mathbb{Z}$ für jede n-Zelle. Die Differentiale im zellulären Kettenkomplex werden damit Matrizen (mit Einträgen in $\mathbb{Z}$). Der Eintrag

entsprechend n-Zelle E_λ und n-Zelle E_σ ist der Grad der Abbildung von Sphären

$$S^n \to X^{n-1} \to S^{n-1}$$

wobei erster Pfeil die Einschränkung der gewählten charakteristischen Abbildung für Zelle E_λ ist, und zweiter Pfeil die Quotientenabbildung entsprechend der Zelle E_σ. (Eigentlich ist das wahre Ziel der zweiten Abbildung D^{n-1}/S^{n-2}, und sie ist auf der Zelle E_σ gegeben durch das Inverse der charakteristischen Abbildung φ_σ. Das Komplement $X^{n-1} \setminus E_\sigma$ wird auf den Grundpunkt von D^{n-1}/S^{n-2} abgebildet.)

Satz: Homologie vom zellulären Kettenkomplex $C(X)$ von X ist isomorph zu Homologie von X.

5. Kohomologie

Elementare Definition mit Abbildungszykeln, analog zu Homologie. Lange exakte Mayer-Vietoris-Folge in Kohomologie bei $X = V \cup W$, wobei V und W offen in X. (Schmerzhafter neuer Beweis beruhend auf Satz über Einhängung, der noch vereinfacht werden kann. Leider Bedingungen an X, V, W und $V \cap W$: alle parakompakt.)

Allerhand lange exakte Folgen in Kohomologie, wie zu erwarten.

Konsequenz: Für CW-Raum X mit zellulärem Kettenkomplex $C(X)$ ist Homologie von $\hom(C(X), \mathbb{Z})$ isomorph zu Kohomologie von X.

6. Produkte in Kohomologie und Homologie

Definitionen meist elementar, aber etwas unsystematisch.

- Externe Produkte in Homologie und Kohomologie. Gedanke: von $H^p(X) \times H^q(Y)$ nach $H^{p+q}(X \times Y)$ und von $H_p(X) \times H_q(Y)$ nach $H_{p+q}(X \times Y)$. Bilinear, genauer gesagt: bi-additiv.
- Cup-Produkt in Kohomologie: man nehme $X = Y$ und setze das externe Produkt $H^p(X) \times H^q(X) \to H^{p+q}(X \times X)$ zusammen mit $H^{p+q}(X \times X) \to H^{p+q}(X)$ induziert durch Diagonale $X \to X \times X$.
- Skalarprodukt. Ist zwar wichtig, ist aber nur in Üb-blatt 11 erwähnt worden. Gedanke: von $H^n(X) \times H_n(X)$ nach $\mathbb{Z}$. Bilinear.
- Cap-Produkt: schwierige Sache. Von $H^p(X) \times H_q(X)$ nach $H_{p-q}(X)$. Bilinear ... landet eigentlich in

  $$\tilde{H}_p\left(\frac{X \times S^q}{X \times \star}\right).$$

  Ist assoziativ zusammen mit Cup-Produkt. Skalarprodukt kann als Spezialfall von Cap-Produkt gesehen werden.

- Produkte haben Natürlichkeitseigenschaften ... aber welche? (Fall Cup-Produkt: illustriert durch Aufg 3 von Blatt 7. Fall Cap-Produkt: eine Aufgabe in Notizen zur Klausurvorbereitung, Thema 3.)
- Produkte und zelluläre Kettenkomplexe: schwieriges Kapitel. Ein sehr wichtiges Resultat: Für CW-Räume X und Y, deren Produkt auch CW ist, hat man $C(X \times Y) \cong C(X) \otimes C(Y)$ für die zellulären Kettenkomplexe. Man kann das auch zum Ausrechnen von externen Produkten in Kohomologie benutzen.
- Durch das Cap-Produkt wird die Homologie von einem Raum X zu einem Modul über dem (graduierten) Kohomologiering von X. Der Kohomologiering von X ist übrigens graduiert kommutativ. (Was heisst das eigentlich?)

Hübsche Anwendung von Cup-Produkt: Lyusternik-Schnirelmann-Theorie. Für wegzusammenhängenden Raum X wird gesucht Überdeckung mit offenen Mengen $U_0, U_1, \ldots, U_n$ derart, dass die Inklusionen $U_i \to X$ nullhomotop sind. Das minimale n, für das eine Lösung existiert, ist $LS(X)$ (Lyusternik-Schnirelmann Invariante). Beispiele: $LS(X) = 0$ wenn X zusammenziehbar, $LS(S^n) = 1$, $LS(S^1 \times S^1) = 2$, $LS(\mathbb{C}P^k) = k$. Wenn man die Ringstruktur von $H^*(X)$ kennt, kann man gute untere Schranken für $LS(X)$ angeben.

7. Poincaré-Dualität

Es geht um Homologie und Kohomologie von Mannigfaltigkeiten. (Was ist eigentlich eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit?) Oberstes Ziel: zeigen, dass für eine orientierte kompakte n-dimensionale Mannigfaltigkeit M die Homologie der Mannigfaltigkeit ein freier Modul mit einem Erzeuger ist über dem Kohomologiering der Mannigfaltigkeit. Der Erzeuger sitzt in $H_n(M)$, wird durch die Orientierung bestimmt und heisst *Fundamentalklasse*.

Die Arbeit fängt an mit einer langwierigen Diskussion von Orientierungen und Homologie. Wichtig: lokale Homologiegruppen; eine Formel, die für kompaktes $A \subset M$ die Homologiegruppe $\tilde{H}_n(M /\!\!/ (M \smallsetminus A))$ ausdrückt durch lokale Homologiegruppen (wobei M hier nicht kompakt sein muss). Daraus ergibt sich, dass bei kompaktem M die Orientierungen von M gewissen Elementen von $H_n(M)$ entsprechen.

Beweis von Poincaré-Dualität: durch eine Induktion hauptsächlich auf Grundlage von MV-Folgen. Interessant ist, dass dazu die Aussage verschärft werden muss: Cap-Produkt mit Fundamentalklasse ist ein Isomorphismus von $\tilde{H}^k(M/A)$ nach $H_{n-k}(M \smallsetminus A)$ für kompaktes A in kompaktem M. Dazu musste auch das Cap-Produkt verfeinert werden.

8. Fundamentalgruppe und Überlagerungen

Definition $\pi_1(X,\star) = [S^1, X]_\star$ für Raum X mit Grundpunkt $\star$. Damit Funktor usw. Wichtiger erster Satz: Seifert-vanKampen; erinnert etwas an Mayer-Vietoris in Homologie. Beachten: die gewählte Formulierung beschreibt eine universelle Eigenschaft, daher nicht sehr explizit; man sollte auch eine Formulierung mit Erzeugern und Relationen kennen.

Wichtige Anwendungen: π_1 von CW-Raum. Zusammenhang zwischen π_1 und H_1 .

Überlagerungen: Definition als Faserbündel $p\colon E \to X$ mit diskreten Fasern. Daher UHLP, unique homotopy lifting property. Bei X mit Grundpunkt $\star$ wird die Faser $F = p^{-1}(\star)$ eine Menge mit Wirkung der Gruppe $\pi_1(X,\star)$. In der Regel weiss F (mitsamt Wirkung) vieles oder alles über die Überlagerung $p\colon E \to X$. Genauer: Die Überlagerungen von X bilden eine Kategorie, und

$$(p\colon E \to X) \quad \mapsto \quad p^{-1}(\star)$$

ist ein Funktor von da in die Kategorie der Mengen mit Wirkung von $\pi_1(\star)$. Dieser Funktor ist immer voll treu (fully faithful) und ist in vielen Fällen eine Äquivalenz von Kategorien. (Grob gesprochen: wenn X lokal einfach zusammenhängend ist, dann geht es gut. Aber: wir haben lokal einfach zusammenhängend nicht definiert, sondern stattdessen vorausgesetzt: lokal wegzusammenhängend und noch etwas mehr.)

Damit ist noch nicht alles gesagt: man sollte auch wissen, wie sich bei Überlagerung $p\colon E \to X$ die Zusammenhangskomponenten von E und Fundamentalgruppe $\pi_1(E;\star_E)$ bestimmen lassen aus $F = p^{-1}(\star)$ mit der Wirkung von $\pi_1(X,\star)$.