17.10.2013

# 1. Übungsblatt
# Topologie WS 2013/14 (Weiss)

**1.** Sei $X$ ein topologischer Raum. Zeigen, dass die folgenden Aussagen aequivalent sind:

- $X$ ist zusammenziehbar (contractible).
- $X \neq \emptyset$ und $[X, X]$ hat genau ein Element.
- für jeden beliebigen topologischen Raum $Y$ hat $[Y, X]$ genau ein Element.

**2.** Sei $f\colon S^1 \to S^1$ eine stetige Abbildung. Zeigen: es existiert ein stetiges

$$\bar{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

derart, dass $p \circ \bar{f} = f \circ p$. Dabei ist $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ definiert durch $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$, alias $p(t) = \exp(2\pi i t) \in S^1 \subset \mathbb{C}$; siehe Notizen zur Vorlesung. Ist dieses $\bar{f}$ eindeutig durch $f$ bestimmt?

**3.** Sei $Y$ die Menge der stetigen Abbildungen von $S^1$ nach $S^1$, wobei $S^1$ die gewöhnliche Topologie als Unterraum von $\mathbb{R}^2$ hat. Wir machen aus $Y$ einen metrischen Raum mit Metrik $D$ durch

$$D(f, g) = \max_{x \in S^1} \{d(f(x), g(x))\}$$

für $f, g \in Y$, wobei $d$ die übliche Metrik auf $S^1$ bezeichnet.
Zeigen, dass $Y \simeq S^1 \times \mathbb{Z}$. Dabei soll $\mathbb{Z}$ natürlich die diskrete Topologie haben.

**4.** Sei $a = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ und $b = (-1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Sei $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{a, b\}$ und $Y = \{\, c \in \mathbb{R}^2 \mid \|c - a\| = 1 \text{ oder } \|c - b\| = 1\}$. Bild von $Y$ machen. Zeigen, dass die Inklusion $Y \to X$ eine Homotopieäquivalenz ist. (Dabei sollen $X$ und $Y$ topologisiert werden als Unterräume von $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen Topologie.)

**5.** Sei $A \subset S^1 \subset \mathbb{C}$ die Menge der dritten Einheitswurzeln und $T = \{\, tz \mid z \in A,\ t \in [0, 1]\}$. Dann ist $T$ immer noch eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^2$, die wir mit der Unterraumtopologie versehen. (Bild von $T$ machen.) Sei $X$ der Raum der injektiven Abbildungen von $\{1, 2\}$ nach $T$. Er soll topologisiert werden als Unterraum von $T \times T$.
Zeigen, dass $X \simeq S^1$.

*Zur Diskussion in den Übungsgruppen: Aufgaben 1,2,3; zur Abgabe am* **Donnerstag 24.10., 12:00** *gedacht sind die Aufgaben 4 und 5. Punkte dafür: 25, 25. Es soll immer 50 Punkte pro Übungsblatt geben.*