09.01.2014

11.Übungsblatt
Topologie WS 2013/14 (Weiss)

1. Sei $(V, \leq)$ eine partiell geordnete Menge[1]. Diese bestimmt ein Eckenschema $(V, \mathcal{S})$ wie folgt. Eine endliche nichtleere Teilmenge T von V ist Element von $\mathcal{S}$ genau dann, wenn T mit der von $\leq$ induzierten Ordnung totalgeordnet ist (also für je zwei Elemente $x, y \in T$ gilt, dass entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$).

(i) Eine geordnete Menge $(V, \leq)$ soll erfunden werden, so dass für das zugehörige Eckenschema $(V, \mathcal{S})$ gilt: $|V|_{\mathcal{S}}$ ist homöomorph zu S^1. Versuchen, Anzahl der Elemente von V so klein wie möglich zu machen.
(ii) Eine geordnete Menge $(V, \leq)$ soll erfunden werden, so dass für das zugehörige Eckenschema $(V, \mathcal{S})$ gilt: $|V|_{\mathcal{S}}$ ist homöomorph zu S^2.
(iii) Eine geordnete Menge $(V, \leq)$ soll erfunden werden, so dass für das zugehörige Eckenschema $(V, \mathcal{S})$ gilt: $|V|_{\mathcal{S}}$ ist homöomorph zu S^5. (Man kann es so einrichten, dass V nur 12 Elemente hat.)

2. Wieviele paarweise nicht-isomorphe[2] semi-simpliziale Mengen Y gibt es, bei denen $Y_n = \emptyset$ für $n > 2$ und Y_2 genau ein Element hat? Die dazugehörigen geometrischen Realisierungen sollen skizziert werden (Bilder malen).
Bemerkung, 14.01: diese Aufgabe war nicht ordentlich formuliert und ist so nicht machbar. Zusätzliche Bedingungen an Y müssen gestellt werden. Sei z das einzige Element von Y_2. Jedes $w \in Y_0$ soll die Form $f^*(z)$ haben für ein $f\colon \{0\} \to \{0,1,2\}$, das von w abhängen darf; jedes $w \in Y_1$ soll die Form $f^*(z)$ haben für ein monotones injektives $f\colon \{0,1\} \to \{0,1,2\}$, das von w abhängen darf. Kurz: die semi-simpliziale Menge Y soll von dem einzigen $z \in Y_2$ erzeugt sein.
Weil die Aufgabe bald in den Übungsgruppen besprochen werden soll, möchte ich sie nicht aufschieben; aber wegen der dadurch enstehenden Ärgernisse gibt es 20 Extrapunkte Bonus bei guter Bearbeitung.

3. Ich vermute, dass es eine semi-simpliziale Menge Y gibt, bei der $Y_n = \emptyset$ für $n > 3$ und Y_3 genau ein Element hat, und die geometrische Realisierung[3] $|Y|$ homöomorph zu S^3 ist. Stimmt das, und wenn ja, wie geht es?

---

[1] Das heisst: V ist eine Menge und $\leq$ ist eine Relation auf der Menge V, die die Bedingungen *transitiv*, *reflexiv* und *antisymmetrisch* erfüllt. Dabei bedeutet *reflexiv*, dass $x \leq x$ für alle $x \in V$, und *antisymmetrisch*, dass $x \leq y$ und $y \leq x$ nur dann passiert, wenn $x = y$. Es wird nicht verlangt, dass sich zwei verschiedene Elemente $x, y \in V$ immer vergleichen lassen; wenn also weder $x \leq y$ gilt noch $y \leq x$, dann ist das in Ordnung.

[2] Weil eine semi-simpiziale Menge sich als kontravarianter Funktor von einer gewissen Kategorie $\mathcal{C}$ in die Kategorie der Mengen definieren lässt, wie in Remark 9.9 von Vorlesungsnotizen Woche 11, kann ein *Morphismus* $X \to Y$ zwischen simplizialen Mengen X, Y definiert werden als eine natürliche Transformation von X nach Y. Damit bilden die semi-simplizialen Mengen eine Kategorie. Damit ist auch der Begriff *Isomorphismus* zwischen simplizialen Mengen definiert.

[3] Es ist vielleicht verwirrend, dass wir für geometrische Realisierung bei semi-simplizialen Mengen und auch bei Eckenschemata senkrechte Striche benutzen, die stark an Kardinalität erinnern.

Alles zur Abgabe am Donnerstag 16.01. vor 12:00. Punkte: 5+5+5, 20+20, 15.

Also: $|\mathsf{Y}|$ bedeutet nicht so etwas wie Kardinalität von Y; und $|\mathsf{V}|_{\mathcal{S}}$ hat nicht viel mit der Kardinalität von V zu tun, bei einem Eckenschema $(\mathsf{V}, \mathcal{S})$.