07.06.2019

9.Übungsblatt
Topologie SS 2019 (Weiss)

1. Gegeben eine natürliche Transformation $\nu\colon E \to F$ von halbexakten Homotopiefunktoren und gegeben ein festes $n > 0$. Wir wollen einen neuen halbexakten Homotopiefunktor P bauen wie folgt.

Ein Element von $P(X)$ ist ein Paar (a, b) bestehend aus $a \in E(X^n)$ und $b \in F(X)$. Bedingung: es existiert $\bar{a} \in E(X^{n+1})$ derart, dass $\nu(\bar{a}) \in F(X^{n+1})$ mit der Einschränkung von b übereinstimmt.

Anders ausgedrückt: $P(X)$ ist das Bild vom Pullback von $E(X^{n+1}) \to F(X^{n+1}) \leftarrow F(X)$ im Pullback von $E(X^n) \to F(X^n) \leftarrow F(X)$.

Man zeige, dass P tatsächlich ein halbexakter Homotopiefunktor ist. Es gibt gewisse natürliche Transformationen $E \to P \to F$ mit Zusammensetzung gleich ν. Es sollte gelten $P(S^k) \cong E(S^k)$ für $k \leq n$, $P(S^k) \cong F(S^k)$ für $k > n+1$ und $P(S^k) \cong \mathrm{im}[E(S^k) \to F(S^k)]$ für $k = n+1$.

2. (*Lange atemlose Geschichte zum Thema Eilenberg-MacLane Räume.*) Wie kann man Eilenberg-MacLane Räume explizit konstruieren? Es gibt eine elegante kombinatorische Methode.

(a) *Kan-Dold-Äquivalenz.* Sei Δ wie üblich die Kategorie mit den Objekten $[k] = \{0, 1, \ldots, k\}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$; ein Morphismus von $[k]$ nach $[\ell]$ ist eine Abbildung f von $[k]$ nach $[\ell]$, für die $f(x) \geq f(y)$ in $[\ell]$ gilt falls $x \geq y$ in $[k]$. Ein kontravarianter Funktor X von Δ nach $\mathcal{S}\mathrm{ets}$ heisst *simpliziale Menge*. Man schreibt meistens X_k statt $X([k])$. Das ist Ihnen wahrscheinlich bekannt, und ausserdem kennen Sie wahrscheinlich auch die geometrische Realisierung $|X|$ von X; es ist der Quotient von

$$\coprod_{k \geq 0} X_k \times \Delta^k$$

(wobei Δ^k der geometrische Standardsimplex ist) nach den Relationen $(f^*y, x) \sim (y, f_*x)$ für $f\colon [k] \to [\ell]$ in Δ und $x \in \Delta^k$ und $y \in X_\ell$. Die geometrische Realisierung ist ein CW-Raum. (In Topo 1 haben wir die Variante *semi-simpliziale Menge* gesehen; geht ähnlich, nur wird statt Δ die Unterkategorie benutzt, die entsteht, wenn man nur noch die injektiven Morphismen in Δ zulässt.)

Ein kontravarianter Funktor X von Δ in die Kategorie der abelschen Gruppen heisst *simpliziale abelsche Gruppe*. So ein X kann natürlich als simpliziale Menge betrachtet werden und hat dann wieder eine geometrische Realisierung $|X|$. (Wir brauchen hier nicht zu diskutieren, ob $|X|$ die Struktur einer topologischen abelschen Gruppe hat; in gewisser Weise stimmt das aber.)

Satz von Dold-Kan. Die Kategorie der simplizialen abelschen Gruppen ist äquivalent zur Kategorie der Kettenkomplexe von abelschen Gruppen (graduiert über $\mathbb{Z}$, aber trivial in negativen Dimensionen).

Anleitung zum Beweis: Ein Kettenkomplex D von abelschen Gruppen (graduiert über $\mathbb{Z}$, mit $D_k = 0$ für $k < 0$) bestimmt eine simpliziale abelsche Gruppe X wie folgt: X_k ist die abelsche Gruppe der Kettenabbildungen vom zellulären Kettenkomplex von Δ^k nach

D. Hierbei hat Δ^k die übliche CW-Struktur (mit je einer j-Zelle für jede Teilmenge von $\{0,1,\ldots,k\}$, die genau $j+1$ Elemente hat).

Sätze aus der Theorie der simplizialen Mengen. Jede simpliziale Gruppe hat als simpliziale Menge die Kan-Eigenschaft.[1] Jede simpliziale Menge X mit Grundpunkt, die die Kan-Eigenschaft hat, lässt folgende praktische Beschreibung der Homotopiegruppen $\pi_k(|X|,*)$ zu.[2] Elemente von $\pi_k(|X|,*)$ können durch Elemente y von X_k repräsentiert werden, für die alle $f^*y \in X_j$ bei nicht-surjektivem $f\colon [j] \to [k]$ in Δ mit dem Grundpunkt von X_j übereinstimmen. Zwei solche Elemente $y_a, y_b \in X_k$ bestimmen dasselbe Element von $\pi_k(|X|,*)$ genau dann, wenn ein $x \in X_{k+1}$ existiert derart, dass $g^*x \in X_j$ der Grundpunkt von X_j ist, falls $g\colon [j] \to [k+1]$ ein Morphismus in Δ ist, dessen Bild weder $\{1,2,\ldots,k+1\}$ noch $\{0,2,3,\ldots,k+1\}$ enthält, wohingegen die beiden verbleibenden interessanten $g^*x \in X_k$ die gegebenen Elemente y_a und y_b sind.

Darus kann man ersehen: wenn D ein Kettenkomplex ist wie im Kan-Dold-Satz, und X die entsprechende simpliziale abelsche Gruppe, dann ist $\pi_k(|X|) \cong H_k(D)$. Auf diese Weise kann man durch geeignete Wahl von D leicht Eilenberg-MacLane-Räume herstellen.

Alles zur Abgabe bis Fr 21.6. um 10:00, Briefkasten 184. Punkte: 10, 10.

[1] Notfalls *Kan-Komplex* bei Wikipedia nachschauen.

[2] Wir nehmen an, dass der Grundpunkt von $|X|$ durch eine Element $z \in X_0$ gegeben ist; durch diese Wahl von $z \in X_0$ wird übrigens jedes X_k zu einer Menge mit Grundpunkt, man überlege sich das, und X wird zu einem kontravarianten Funktor von Δ nach $\mathcal{S}ets_*$, Kategorie der Mengen mit Grundpunkt und grdpkterhaltenden Abbildungen.