24.05.2019

# 7.Übungsblatt
# Topologie SS 2019 (Weiss)

**1.** a) Gegeben zusammenhängende CW-Räume $X$ und $Y$ mit Grundpunkt. Zeigen Sie, dass

$$\text{hofiber}[\,X \vee Y \hookrightarrow X \times Y\,] \simeq \Omega X * \Omega Y$$

wobei $*$ den Join bezeichnet.[1]

b) Aus a) sollte irgendwie folgen, dass $\Omega(X \vee Y) \simeq \Omega X \times \Omega Y \times \Omega(\Omega X * \Omega Y)$. Das ist hübscher als die Formel von Prop 5.2.3.

c) Formel aus b) ausprobieren im Fall $X = Y = \mathbb{C}P^\infty$. Ich schlage das vor, weil gefragt worden ist, ob sich der Satz von Hilton-Milnor irgendwie auf den allgemeinen Fall $\Omega(X \vee Y)$ ausdehnen lässt (ohne die Annahme, dass $X$ und $Y$ Einhängungen sind).

**2.** Sei $K$ eine topologische Gruppe, $X$ ein zusammenhängender kompakter CW-Raum mit Grundpunkt, der ausser dem Grundpunkt nur $r$ Zellen hat. Sei $[X, K]_*$ die Menge der Homotopieklassen von grundpunkterhaltenden stetigen Abbildungen von $X$ nach $K$. Mit punktweiser Multiplikation von solchen Abbildungen wird $[X, K]_*$ eine Gruppe $\Gamma$. Man zeige, dass diese Gruppe $\Gamma$ nilpotent von Klasse $\leq r$ ist, das heisst, ihre absteigende Zentralreihe[2] hat die Form $\Gamma = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \cdots \supset \Gamma_k = \{1\}$ mit $k \leq r$.

(Diese Aussage/Formulierung ist nicht gerade scharf; bitte nach besseren Formulierungen suchen.)

*Alles zur Abgabe bis Freitag 31.05. um 10:00, Briefkasten 184. Punkte: 5+3+2, 10.*

[1] Der Join von $A$ und $B$ ist das Homotopie-Pushout von $A \xleftarrow{pr_1} A \times B \xrightarrow{pr_2} B$. Im Fall von zusammenhängenden Räumen A,B mit nichtdegenerierten Grundpunkten ist er $\simeq \Sigma(A \wedge B)$.

[2] Die absteigende Zentralreihe ist definiert durch $\Gamma_i = [\Gamma, \Gamma_{i-1}]$, wobei hier die eckigen Klammern natürlich für eine Kommutatorkonstruktion stehen.