09.05.2019

5.Übungsblatt
Topologie SS 2019 (Weiss)

1. *Zum Teil eine Wiederholung von Übungsblatt 3, Topo 2, WS 18/19.* Sei X ein CW-Raum mit Grundpunkt $*$; der Grundpunkt soll eine 0-Zelle sein. Der Einfachheit halber sei X kompakt und zusammenhängend. Sei

$$J^{(n)}X := \underbrace{X \times X \times X \times \cdots \times X}_{n} / \sim$$

(Quotient der n-ten Potenz von X), wobei $\sim$ die folgenden Relationen bezeichnet:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \sim (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{j+1}, x_j, \ldots, x_n)$$

falls $x_j = *$ (wobei $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ beliebig). Es gibt eine "Inklusion"

$$J^{(n)}X \longrightarrow J^{(n+1)}X$$

definiert durch $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, *)$. Sei JX die aufsteigende Vereinigung der $J^{(n)}X$ mit der Kolimes-Topologie (eine Teilmenge von JX ist genau dann offen, wenn ihr Durchschnitt mit jedem $J^{(n)}X$ offen ist).

(i) Die Produkt-CW-Strukturen auf den Potenzen von X bestimmen eine CW-Struktur auf den Quotienten $J^{(n)}X$ für jedes n und damit eine CW-Struktur auf JX.

(ii) JX hat eine (naheliegende) Struktur von Monoid[1]; die Multiplikationsabbildung $JX \times JX \to JX$ ist stetig und sogar zellulär.

Nun sei E_X der Quotientenraum, der aus der disjunkten Vereinigung von zwei disjunkten Kopien von $\mathrm{cone}(X) \times JX$ entsteht, wenn wir Punkte der Form (x, w) in der ersten Kopie (wobei $x \in X \subset \mathrm{cone}(X)$ und $w \in JX$) mit (x, wx) in der zweiten Kopie verkleben. (Der Ausdruck wx ist einigermassen sinnvoll, weil $X \cong J^{(1)}X \subset JX$ und weil eben JX eine ausgezeichnete Monoidstruktur hat.)

Man zeige, dass E_X zusammenziehbar ist.

2. Das etwas langweilige Lemma 4.2.3 (Vorsicht, neue Nummerierung) sollte ein Gegenstück für Homotopie-Pushout-Quadrate haben.

Alles zur Abgabe bis Freitag 17.05. um 10:00, Briefkasten 184. Einzelabgabe. Punkte: 17, 3.

[1]... hat eine assoziative Multiplikation mit neutralem Element. Inverse werden nicht gefordert.