02.05.2019

# 4.Übungsblatt
# Topologie SS 2019 (Weiss)

**1.** Beweis von Prop 3.1.6 durchführen; Vorbild sollte wahrscheinlich der Beweis von Prop 3.1.5. sein.

**2.** Gegeben sei ein Diagramm $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C$ von Räumen. Angenommen, $f$ ist eine Kofaserung; genauer, Inklusion eines abgeschlossenen Unterraumes mit der HEP (homotopy extension property). Sei $g^\sharp \colon C^\sharp \to B$ die fasernde Ersetzung (fibrant replacement) von $g$ nach der Methode von Serre. (Siehe Example 1.7.1.) Ist die Inklusion

$$(g^\sharp)^{-1}(A) \longrightarrow C^\sharp$$

wieder eine Kofaserung?

**3.** Sei $f \colon A \to B$ eine grundpunkterhaltende zelluläre Abbildung von zusammenhängenden CW-Räumen mit Grundpunkt. Sei $C = \mathrm{cone}(f)$ der (reduzierte) Abbildungskegel von $f$, wieder ein CW-Raum mit Grundpunkt. Man zeige: es gibt ein Homotopie-Kofaserquadrat (homotopy pushout square) von der Form

$$\begin{tikzcd} A \times \Omega C \arrow[r] \arrow[d] & \Omega C \arrow[d] \\ \mathrm{hofiber}[B \hookrightarrow C] \arrow[r] & * \end{tikzcd}$$

(Theorem 4.3.1 sollte hier übrigens nicht benutzt werden, oder jedenfalls nur für Anregungen. Allerdings könnte Aufgabe 2 von diesem Blatt nützlich sein.)

Aus dieser Aussage kann man weitere interessante Aussagen in Richtung von Satz von Blakers-Massey ableiten. (Eine angenehme Überraschung.) Dazu sollte man den linken vertikalen Pfeil im Quadrat oben etwas genauer beschreiben. Wenn $A$ ein $p$-zusammenhängender Raum ist und $f \colon A \to B$ eine $q$-zusammenhängende Abbildung, dann ist $C$ ein $q$-zusammenhängender Raum und $\Omega C$ ist $(q-1)$-zusammenhängend. Dann folgt mit der obigen Aussage, dass eine gewisse kanonische Abbildung

$$A \longrightarrow \mathrm{hofiber}[B \to C]$$

*homologisch* $(p+q)$-zusammenhängend ist. Wenn ausserdem $p \geq 1$ und $q \geq 1$, können wir mit Hurewicz weiter schliessen, dass diese Abbildung tatsächlich $(p+q)$-zusammenhängend ist. (Was erhält man im Fall $A = S^n$ und $B = *$ ? Man erhält den Satz von Freudenthal.)

*Alles zur Abgabe bis Freitag 10.05. um 10:00, Briefkasten 184. Einzelabgabe. Punkte: 3,5,12.*