25.04.2019

3.Übungsblatt
Topologie SS 2019 (Weiss)

1. Sei X ein (weg)zusammenhängender CW-Raum mit trivialer Fundamentalgruppe $\pi_1(X,\star)$. Angenommen, es gibt eine natürliche Zahl $c \geq 2$ derart, dass $H_k(X) = 0$ für alle $k > c$. Man zeige: es existiert ein CW-Raum Y der Dimension höchstens $c+1$, der zu X homotopieäquivalent ist.

Hinweis: Gute Gelegenheit, die Sätze von Hurewicz und G Whitehead anzuwenden.

2. Sei $Y = S^2 \vee S^2$. Sei $f\colon Y \to Y$ eine (stetige) Abbildung, so dass der induzierte Homomorphismus von $H_2(Y) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ nach $H_2(Y)$ die Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

hat. Man bilde den Abbildungstorus von f, also den Quotientenraum

$$T(f) := \frac{Y \times [0,1]}{\forall y \in Y : (y,1) \sim (f(y),0)}.$$

Es gibt eine kanonische Abbildung $q\colon T(f) \to S^1$, induziert durch $(y,t) \mapsto e^{2\pi i t}$ für $y \in Y$ und $t \in [0,1]$.

(i) Ist f eine Homotopieäquivalenz?

(ii) Was lässt sich über die Homotopiefaser(n) von q sagen? Eine einfache Beschreibung ihres Homotopietyps ist erwünscht.

(iii) Man berechne $H_j(T(f))$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ und zeige, dass q *Iso*morphismen

$$q_*\colon H_j(T(f)) \to H_j(S^1)$$

für alle $j \in \mathbb{Z}$ induziert.

(iv) Ist q eine Homotopieäquivalenz?

Alles zur Abgabe bis Freitag 03.05. um 10:00, Briefkasten 184. Einzelabgabe. Punkte: 8, 2+4+4+2.