Notizen zur nicht-Euklidischen Geometrie

Michael Weiss
Mathematisches Institut, Universität Münster
Winter 2015/2016 und/oder Sommer 2019

CHAPTER 1

Metrische Räume

Bei Iversen (*An Invitation to Geometry*, Univ Aarhus Lecture Notes Series No.59) werden die Axiome von Euklid zur Geometrie der Ebene als Bedingungen an einen metrischen Raum verstanden. Deswegen fangen wir mit dem Begriff *metrischer Raum* an.

1.1. Der Begriff

DEFINITION 1.1.1. Ein *metrischer Raum* besteht aus einer Menge X und einer Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Für beliebige Elemente y, z von X gilt $d(y,z) \geq 0$, und es gilt $d(y,z) = 0$ genau dann, wenn $y = z$.
(2) Für beliebige Elemente y, z von X ist $d(y,z) = d(z,y)$.
(3) Für beliebige Elemente w, y, z von X gilt $d(w,z) \leq d(w,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung).

Die Abbildung d wird auch eine *Metrik* auf der Menge X genannt (vorausgesetzt, dass sie diese Eigenschaften erfüllt).

BEMERKUNG 1.1.2. *Was man hier alles missverstehen kann.* Erstmal kann man missverstehen: $X \times X$. Allgemein: wenn X und Y beliebige Mengen sind, dann soll $X \times Y$ die Menge sein, deren Elemente die geordneten Paare (a, b) mit $a \in X$ und $b \in Y$ sind. *Was kann man hier schon wieder missverstehen*: das Wort *geordnet*. Im Ausdruck *geordnetes Paar* ist das Wort *geordnet* nur ein Hinweis dahingehend, dass es uns wichtig ist, wer in dem geordneten Paar die linke (erste) Koordinate besetzt und wer die rechte (zweite) Koordinate besetzt. Es bedeutet nicht, dass $a > b$ oder $a < b$ sein muss, was in den meisten Fällen auch garnicht sinnvoll wäre, etwa wenn a ein Apfel und b eine Birne ist. Es ist eine Art Ermahnung mit dem Inhalt, dass (a, b) zum Beispiel nicht mit der Menge $\{a, b\}$ verwechselt werden soll. Denn diese wäre ja bekanntlich nicht zu unterscheiden von der Menge $\{b, a\}$, womit wir über die Besetzung der Koordinaten schon sehr im Unklaren wären.
Beispiel: wenn $X = \{\text{Apfel}, \text{Birne}, \text{Zitrone}\}$ ist, dann hat $X \times X$ neun Elemente. Eines davon ist das geordnete Paar $(\text{Apfel}, \text{Zitrone})$. Ein anderes (!) ist das geordnete Paar $(\text{Zitrone}, \text{Apfel})$.
Wie man es verstehen soll. In Bedingung (1) wird gesagt, dass die Abbildung d für jedes geordnete Paar (y, z) mit Koordinaten y und z aus X eine nicht-negative reelle Zahl $d(y, z)$ auswählt. Man soll sich diese Zahl als den *Abstand* von y nach z vorstellen. Wenn man dieses Wort *Abstand* so benutzt, dann bedeutet der Rest von (1), dass der Abstand von y nach z, also die reelle Zahl $d(y, z)$, genau dann 0 ist, wenn $y = z$ ist. Weiter bedeutet (2), dass der Abstand von y nach z gleich dem Abstand von z nach y ist (für alle y und z aus der Menge X). Wir können deswegen auch sagen: *Abstand zwischen* y *und* z (womit wir immer noch $d(y, z)$ meinen). Das ist angenehm. Schliesslich sagt (3)

aus, dass der Abstand von w nach z niemals grösser ist als die Summe aus Abstand von w nach y und Abstand von y nach z.

Etwas Allgemeines zu Definitionen in der Mathematik. In der Mathematik werden durch eine Definition normalerweise Pflichten auferlegt, aber auch Rechte gegeben. Eine Definition ist nicht nur Beschreibung von Dingen, die die Natur uns geschenkt hat (so, wie man das von einer Definition in der Zoologie vielleicht erwarten darf). Also: wenn jemand eine Menge X *erfindet* und dazu eine Abbildung d von $X \times X$ nach $\mathbb{R}$, so dass X und d zusammen die Eigenschaften oben erfüllen, dann ist der/diejenige berechtigt, das Ding einen metrischen Raum zu nennen.

Beispiel 1.1.3. Wir setzen $X = \mathbb{R}$ und $d(y,z) = |z-y|$. Die Eigenschaften einer Metrik sind durch d erfüllt. (Zum Beispiel Dreiecksungleichung: behauptet wird $|w-z| \le |w-y|+|y-z|$ für beliebige reelle Zahlen w, y, z. Folgt aus $|a+b| \le |a|+|b|$, wenn man $a = w-y$ und $b = y-z$ setzt. Man beachte dabei, dass manchmal $|a+b|$ tatsächlich kleiner ist als $|a|+|b|$.)

Beispiel 1.1.4. Wir setzen $X = \mathbb{R}$ und $d(y,z) = |z|+|y|$ für den Fall, dass $y, z \in \mathbb{R}$ und $y \neq z$; sonst, also wenn $y = z$, setzen wir $d(y,z) = 0$. Die Eigenschaften einer Metrik sind erfüllt. Diese Metrik auf der Menge $\mathbb{R}$ wird gerne von Franzosen und Frankophilen die *SNCF-Metrik* genannt.

Beispiel 1.1.5. Wir setzen $X = \mathbb{R}^n$ und

$$d(y,z) = \sqrt{(z_1-y_1)^2 + (z_2-y_2)^2 + \cdots + (z_n-y_n)^2}.$$

Dabei sind $y_1, y_2, \dots, y_n$ die Koordinaten von $y \in \mathbb{R}^n$; ähnlich für $z \in \mathbb{R}^n$. Die Eigenschaften einer Metrik sind erfüllt. (Der Nachweis der Dreiecksungleichung ist allerdings garnicht so einfach. Hoffentlich haben Sie das in Analysis I schon gehabt?) Diese Metrik heisst: *Euklidische Metrik* auf $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 1.1.6. Wir setzen $X = \mathbb{R}^n$ und

$$d(y,z) = |z_1-y_1| + |z_2-y_2| + \cdots + |z_n-y_n|.$$

Dabei sind $y_1, y_2, \dots, y_n$ die Koordinaten von $y \in \mathbb{R}^n$; ähnlich für $z \in \mathbb{R}^n$. Die Eigenschaften einer Metrik sind erfüllt. (Der Nachweis der Dreiecksungleichung ist diesmal einfach.)

Beispiel 1.1.7. Sei X die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ nach $\{0,1\}$. Für $f \in X$ und $g \in X$ setzen wir

$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}|f(k)-g(k)|.$$

Dann erfüllt d die Eigenschaften einer Metrik auf X. (Statt Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\{0,1\}$ kann man auch sagen: Folge, bei der nur die Zahlen 0 und 1 als Folgenglieder erlaubt sind.)

Definition 1.1.8. Sei (X,d) ein metrischer Raum, das heisst, X ist eine Menge und d ist eine Metrik auf X. Sei A eine Teilmenge von X. Dann ist die Einschränkung von $d: X \times X \to \mathbb{R}$ auf $A \times A$ eine Metrik auf A, die zum Beispiel mit d_A bezeichnet wird. Man sagt: (A, d_A) ist *metrischer Unterraum* von (X,d) usw. Man sagt auch: d_A ist die von d *induzierte Metrik* auf A.

Beispiel 1.1.9. Sei $\mathbb{R}$ versehen mit der üblichen Metrik d, also $d(y,z) = |z-y|$. Sei $A = \{0,1,5\}$. Dann ist d_A die Metrik auf A, die gegeben ist durch

$$d(0,1) = d(1,0) = 1,\ d(0,5) = d(5,0) = 5,\ d(1,5) = d(5,1) = 4,$$
$$d(0,0) = d(1,1) = d(5,5) = 0.$$

1.2. Abstandserhaltende Abbildungen und Isometrien

Definition 1.2.1. Es seien (S,d) und $(T,d^\sharp)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon S \to T$ heisst *abstandserhaltend* (für die Metriken d und $d^\sharp$), falls für alle $x,y \in S$ die Gleichung $d^\sharp(f(x),f(y)) = d(x,y)$ gilt.
Eine abstandserhaltende Abbildung f, die ausserdem *bijektiv* ist, darf *Isometrie* genannt werden.

(Manche Leute sagen auch schon *Isometrie*, wenn f nur abstandserhaltend ist, aber ich bin dafür, dass Worte, die mit *Iso ...* anfangen, umkehrbare Dinge bezeichnen.)

Bemerkung 1.2.2. Eine abstandserhaltende Abbildung zwischen metrischen Räumen ist immer injektiv. *Beweis*: mit Bezeichnungen wie oben folgt aus $f(x) = f(y)$ in T, dass $d^\sharp(f(x),f(y)) = 0$, daher $d(x,y) = 0$ weil f abstandserhaltend, daher $x = y$ in S weil d die Bedingungen für eine Metrik erfüllt. Also ist f injektiv.

Mit Blick auf die euklidische Geometrie betrachten wir jetzt genauer die metrischen Räume $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik d, also $d(y,z) = |z-y|$ für Elemente y und z aus $\mathbb{R}$, und $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Metrik D, also

$$D(y,z) = \sqrt{(z_1-y_1)^2 + (z_2-y_2)^2}$$

für Elemente y und z aus $\mathbb{R}^2$.

Beispiel 1.2.3. Was gibt es für abstandserhaltende Abbildungen f von $(\mathbb{R},d)$ nach $(\mathbb{R},d)$? Man überlegt sich, dass ein Element x von $\mathbb{R}$ eindeutig bestimmt ist durch seine Abstände von zwei fest gewählten verschiedenen Elementen (zum Beispiel 0 und 1). Daraus folgt, dass eine abstandserhaltende Abbildung f von $(\mathbb{R},d)$ nach $(\mathbb{R},d)$ schon festgelegt ist durch die Werte $f(0)$ und $f(1)$. Diese sind nicht ganz beliebig, sondern müssen $|f(1)-f(0)| = |1-0| = 1$ erfüllen. Dann haben wir

$$f(x) = ax + b$$

wobei $a = \pm 1 = f(1) - f(0)$ und $b = f(0)$ beliebig ist in $\mathbb{R}$. Damit ist auch klar, dass f automatisch bijektiv ist, also eine Isometrie.

Beispiel 1.2.4. Was gibt es für abstandserhaltende Abbildungen f von $(\mathbb{R},d)$ nach $(\mathbb{R}^2,D)$? Angenommen, wir kennen $f(0)$ und $f(1)$. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < 1$. Wenn $f(x)$ nicht auf der Geraden durch $f(0)$ und $f(1)$ liegt, dann bilden die Punkte $f(0)$, $f(1)$ und $f(x)$ ein ordentliches Dreieck und es gilt deswegen die strikte Ungleichung

$$D(f(0),f(x)) + D(f(x),f(1)) > D(f(0),f(1).$$

Andererseits ist $d(0,x) + d(x,1) = d(0,1)$ nach Wahl von x, strikte Gleichheit. Also ist etwas schiefgelaufen; f nicht abstandserhaltend; Widerspruch. Also muss $f(x)$ doch auf der Geraden durch $f(0)$ und $f(1)$ liegen. Das heisst, $f(x)$ muss die Form $f(0) + a_x(f(1) - f(0))$ haben für ein $a_x \in \mathbb{R}$ (vektorartige Bezeichnungen). Dann wird $x = d(0,x) = D(f(0),f(x)) = |a_x|$ und ebenso $1-x = d(x,1) = D(f(x),f(1)) = |1-a_x|$. Dann folgt $a_x = x$. Damit ist $f(x) = f(0) + x(f(1) - f(0))$ ausgerechnet.

Ähnlich verfährt man, wenn $x > 1$. Wenn $f(1)$ nicht auf der Geraden durch $f(0)$ und $f(x)$ liegt, dann Widerspruch; also liegt es auf der Geraden; also ist wieder

$$f(x) = f(0) + a_x((f(1) - f(0))$$

mit $a_x \in \mathbb{R}$, und wenn die Abstände passen sollen, muss $a_x = x$ gelten, also wieder

$$f(x) = f(0) + x(f(1) - f(0)).$$

Ähnlich, wenn $x < 0$.
Zusammenfassend, f ist durch $u = f(0)$ und $v = f(1) - f(0)$ bestimmt und hat dann die Form $f(x) = u + xv$. Dabei kann $u \in \mathbb{R}^2$ beliebig gewählt werden und $v \in \mathbb{R}^2$ unterliegt der Einschränkung $v_1^2 + v_2^2 = 1$.

Bemerkung 1.2.5. Dieses Beispiel erinnert uns auch daran, dass jede Gerade L in $\mathbb{R}^2$ das Bild einer abstandserhaltenden Abbildung f von $(\mathbb{R}, d)$ nach $(\mathbb{R}^2, D)$ ist. Man sollte sich dabei klar machen, dass die Beziehung $L = \text{bild}(f)$ uns zwar erlaubt, L aus f eindeutig zu bestimmen, aber nicht f aus L. Wenn f und g zwei abstandserhaltende Abbildungen von $(\mathbb{R}, d)$ nach $(\mathbb{R}^2, D)$ sind mit $\text{bild}(f) = \text{bild}(g)$, dann ist $h := f^{-1} \circ g$ definiert (wobei die Injektivität von f benutzt wird) und ist eine Isometrie von $(\mathbb{R}, d)$ nach $(\mathbb{R}, d)$. Wir sehen also, dass f und g sich nur unterscheiden durch Zusammensetzung mit einer Isometrie h von $(\mathbb{R}, d)$ nach $(\mathbb{R}, d)$: nämlich $g = f \circ h$.

Beispiel 1.2.6. Was gibt es für abstandserhaltende Abbildungen f von $(\mathbb{R}^2, D)$ nach $(\mathbb{R}^2, D)$? Erstmal bemerken wir, dass so ein f festgelegt ist durch die Werte $f(0, 0)$, $f(1, 0)$ und $f(0, 1)$. Denn zu jedem Punkt p in $\mathbb{R}^2$ können wir

- entweder einen Punkt q auf der Geraden durch $(0, 0)$ und $(1, 0)$ finden derart, dass p auf der Geraden durch q und $(0, 1)$ liegt;
- oder einen Punkt q in $\mathbb{R}^2$ auf der Geraden durch $(0, 0)$ und $(0, 1)$ finden derart, dass p auf der Geraden durch q und $(1, 0)$ liegt;
- oder einen Punkt q in $\mathbb{R}^2$ auf der Geraden durch $(1, 0)$ und $(0, 1)$ finden derart, dass p auf der Geraden durch q und $(0, 0)$ liegt.

Im ersten Fall, weil $f(0, 0)$ und $f(1, 0)$ schon vorgegeben sind, ist damit $f(q)$ festgelegt (Beweis wie in Beispiel 1.2.4), und weil dann $f(q)$ und $f(0, 1)$ festgelegt sind, ist auch $f(p)$ festgelegt (Beweis wie in Beispiel 1.2.4). Ähnlich kann man in den beiden anderen Fällen argumentieren.
Zweitens bemerken wir, dass die Punkte $f(0, 0)$, $f(1, 0)$ und $f(0, 1)$ ein Dreieck in $\mathbb{R}^2$ mit den Seitenlängen 1, 1 und $\sqrt{2}$ bilden müssen (daher ein rechtwinkliges). Wenn wir also schreiben

$$f(0, 0) = u, \quad f(1, 0) = u + v, \quad f(0, 1) = u + w$$

wobei $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ usw., dann muss $v_1^2 + v_2^2 = 1$ gelten und $w_1^2 + w_2^2 = 1$ und $v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0$ (für den rechten Winkel).
Drittens: wenn wir u, v und w in dieser Weise festgelegt haben, dann können wir die dazugehörige abstandserhaltende Abbildung hinschreiben (von der wir schon wissen, dass sie eindeutig ist):

$$f(x) = u + x_1 v + x_2 w = (u_1 + x_1 v_1 + x_2 w_1, u_2 + x_1 v_2 + x_2 w_2).$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass es sich hierbei um eine abstandserhaltende Abbildung handelt. Ausserdem ist sie bijektiv, das heisst, sie ist eine Isometrie. Man kann sie auch in der Vektor-und-Matrix-Form

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

schreiben. Die Bedingungen $v_1^2 + v_2^2 = 1$, $w_1^2 + w_2^2 = 1$ und $v_1 w_1 + v_2 w_2$ gelten natürlich immer noch. Eine 2×2-Matrix, die diese Bedingungen erfüllt, heisst *orthogonale* 2×2-*Matrix*.

Vokabeln. Distance preserving map, isometry, line, euclidean plane, triangle, matrix, orthogonal matrix.

1.3. Stetige Abbildungen

In der Analysis werden metrische Räume gerne eingeführt, weil sie es möglich machen, eine ziemlich allgemeine Definition von Stetigkeit zu geben. Wenn man das versteht, dann versteht man auch nach und nach, dass metrische Räume für die Diskussion von Stetigkeit eigentlich zuviel Information enthalten, und auf diese Weise kommt man vielleicht zum Begriff *topologischer Raum* und überhaupt zur Topologie.
Eigentlich muss uns das alles hier nicht so sehr interessieren, denn wir sagen (mit Iversen): metrische Räume sind vor allem in der *Geo-Metrie* nützlich. Das ist übrigens ein Bruch mit alten Traditionen. Demnach sind uns abstandserhaltende Abbildungen und Isometrien wichtig; Abbildungen zwischen metrischen Räumen, die nur stetig sind, dagegen nicht so sehr. Trotzdem ist es manchmal ganz gut, zu wissen, was Stetigkeit bedeutet.

Definition 1.3.1. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, wobei $X = (X, d)$ und $Y = (Y, \rho)$ metrische Räume sind. Sei $a \in X$. Wir sagen, dass f *stetig ist im Punkt* a, wenn zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl $\delta > 0$ existiert derart, dass $\rho(f(a), f(b)) < \varepsilon$ für jedes $b \in X$ mit $d(a, b) < \delta$. Wir sagen, dass f *stetig* ist, wenn es an jedem $a \in X$ stetig ist.

Beispiel 1.3.2. Eine abstandserhaltende Abbilldung zwischen metrischen Räumen ist stetig. (Denn zu jedem ε gibt es ein δ ... wir können in diesem Fall $\delta := \varepsilon$ nehmen.)

Beispiel 1.3.3. Sei X wie in Beispiel 1.1.7 und $Y = \mathbb{R}$ mit der Standardmetrik. Die Abbildung, die $g \in X$ abbildet auf

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} g(k) \qquad \in \mathbb{R}$$

ist nicht abstandserhaltend, aber sie ist stetig. Wie sieht eigentlich ihr Bild aus?

Beispiel 1.3.4. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die surjektiv und monoton ist (letzteres soll heissen $f(x) \ge f(y)$ wann immer $x \ge y$). Dann ist f stetig als Abbildung von $(\mathbb{R}, d)$ nach $(\mathbb{R}, d)$, wobei d die Standardmetrik ist, also $d(y, z) = |z - y|$.

Definition 1.3.5. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(a_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ eine Folge in X. Man sagt, dass die Folge $(a_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ gegen ein Element $a \in X$ *konvergiert*, wenn $\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$ ist.

Proposition 1.3.6. *Sei* $f\colon X \to Y$ *eine Abbildung, wobei* $X = (X, d)$ *und* $Y = (Y, \rho)$ *metrische Räume sind. Sei* $a \in X$ *gegeben. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

- f *ist stetig im Punkt* a*;*
- *für jede Folge* $(a_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ *in* X*, die gegen* a *konvergiert, konvergiert die Folge* $(f(a_n))_{n=0,1,2,\ldots}$ *in* Y *gegen* $f(a)$*.*

Beweis: nein danke, es wird angenommen, dass Sie das kennen. □

Definition 1.3.7. Zwei Metriken d_1 und d_2 auf derselben Menge X werden *äquivalent* genannt, wenn die Identitätsabbildung von X stetig ist als Abbildung von (X, d_1) nach (X, d_2) und ebenso als Abbildung von (X, d_2) nach (X, d_1).

Beispiel 1.3.8. Die Metriken auf $\mathbb{R}^n$ in Beispielen 1.1.5 und 1.1.6 sind äquivalent. Die Metriken auf $\mathbb{R}$ in Beispielen 1.1.3 und 1.1.4 sind nicht äquivalent.

1.4. Übungsaufgaben

Aufgabe 1.4.1. Sei X eine Menge, die nur auf eine einzige Weise mit einer Metrik d ausgestattet werden kann. Was kann über die Anzahl der Elemente von X gesagt werden?

Aufgabe 1.4.2. Sei $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $d(y, z) = (z - y)^2$. Ist dieses d eine Metrik auf $\mathbb{R}$? [3]

Aufgabe 1.4.3. Für $y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}$ sei $d(y, z) = |z| + |y|$ falls $y \neq z$ und $d(y, z) = 0$ falls $y = z$. Nachweisen, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist. Und warum wird sie gerne von Franzosen die *SNCF-Metrik* genannt?

Aufgabe 1.4.4. Eine Metrik D auf $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$D(x, y) = \max\{\, |y_1 - x_1|, |y_2 - x_2| \,\}.$$

Sei d die Standardmetrik auf $\mathbb{R}$, also $d(y, z) = |z - y|$. Sei $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ und $q = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele Abbildungen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, die abstandserhaltend sind (für die Metriken d und D) und $f(0) = p$ sowie $f(1) = q$ erfüllen. [9]

Aufgabe 1.4.5. Metrik D auf $\mathbb{R}^2$ wie in Aufgabe 1.4.4. Gibt es eine Isometrie g von $\mathbb{R}^2$ mit Metrik D nach $\mathbb{R}^2$ mit Metrik D, die die Teilmenge $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$ auf die Teilmenge $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$ abbildet?

CHAPTER 2

Die Axiome von Euklid in einer modernen Formulierung

2.1. Die Axiome

Hier sollen Euklids Axiome für die (Euklidische) Geometrie formuliert werden auf der Grundlage des Begriffs *metrischer Raum*, wie bei Iversen. Es sind in dieser Fassung drei Stück. Die ersten beiden erfordern etwas Vorbereitung.

Sei also X ein metrischer Raum. (Genauer: da ist eine Menge X gegeben und eine Metrik auf X, der wir nicht unbedingt einen Namen geben wollen. Im Notfall kann sie mit d_X bezeichnet werden.) Wir wollen Bedingungen an den metrischen Raum X stellen.

Definition 2.1.1. Eine Teilmenge L von X soll *Gerade* in X heissen, wenn sie das Bild einer abstandserhaltenden Abbildung von $\mathbb{R}$ nach X ist. Dabei soll $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik ausgestattet sein: $d_{\mathbb{R}}(y,z) = |z-y|$.

Bemerkung. Mit dieser Definition ist eine gewisse Gefahr verbunden. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ versehen mit einer Norm. Die Norm bestimmt eine Metrik, so dass X *auch* ein metrischer Raum wird. Der Begriff *Gerade in* X hat jetzt leider zwei Bedeutungen. Man kann ihn im Sinne der linearen Algebra verstehen. Dann ist eine Gerade in X das Bild einer Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to X$, die die Form $f(t) = p + tv$ hat, wobei $p, v \in X$ und $\|v\| = 1$. Oder man kann ihn eben wie in Definition 2.1.1 verstehen, also im metrischen Sinn; dann ist eine Gerade in X das Bild einer abstandserhaltenden Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to X$. Das ist nicht dasselbe! Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to X$ von der Form $f(t) = p + tv$ (wie oben) ist tatsächlich abstandserhaltend, aber nicht jede abstandserhaltende Abbildung von $\mathbb{R}$ nach X muss von dieser Form sein.

Axiom Euklid I. (*Es handelt sich um eine Bedingung an* X.) Zu je zwei verschiedenen Elementen y und z von X existiert genau eine Gerade in X, die y und z enthält. Ausserdem: X hat mehr als ein Element.

Bemerkung 2.1.2. (Wir nehmen an, dass X das Axiom I erfüllt.) Sei L die eindeutige Gerade in X, die y und z enthält. Diese Gerade ist nach Definition Bild einer abstandserhaltenden Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to X$. Weil f injektiv ist, existieren eindeutige a und b in $\mathbb{R}$ mit $f(a) = y$, $f(b) = z$. Das Bild vom Intervall $[a,b]$ bzw. $[b,a]$ unter f ist eine Teilmenge von L, also auch von X, die wir das *Segment* von y nach z nennen und gerne mit $[y,z]$ bezeichnen! Also Vorsicht,

$$[y,z] \subset X.$$

Übrigens haben wir gesehen, dass f durch $L = \text{bild}(f)$ nicht eindeutig bestimmt ist; trotzdem ist diese Definition vom Segment $[y,z]$ als Teilmenge von L in Ordnung, d.h. es ist für diesen Zweck egal, welches f wir wählen, solange es abstandserhaltend ist und L als Bild hat.

Um auch eine Definition von $[y,z]$ für den Fall $y = z$ zu haben, sagen wir in diesem Fall, dass $[y,y] = \{y\}$ ist, d.h., das Segment von y nach y ist die einelementige Menge $\{y\}$.

Sei jetzt L eine Gerade in X. Wir nehmen an, dass Axiom 1 erfüllt ist. Wir wollen eine Relation ρ_L auf der Menge $X \setminus L$ definieren. Dazu seien zwei Elemente $u, v \in X \setminus L$ gegeben. Wir sagen $(u,v) \in \rho_L$, falls das Segment $[u,v]$ in X ganz zu $X \setminus L$ gehört.[1]
Diese Relation ist offenbar symmetrisch (also $(u,v) \in \rho_L$ genau dann, wenn $(v,u) \in \rho_L$) und reflexiv (also $(u,u) \in \rho_L$ für alle $u \in X \setminus L$).

Axiom Euklid II. (Hier wird Axiom I schon vorausgesetzt. *Es handelt sich um weitere Bedingungen an* X.) Für jede Gerade L in X ist die Relation ρ_L auch *transitiv*, also eine Äquivalenzrelation. Als solche hat sie genau *zwei* Äquivalenzklassen. Es existiert eine Isometrie $r_L : X \to X$, die die beiden Äquivalenzklassen miteinander vertauscht und $r_L(y) = y$ erfüllt für alle $y \in L$.

Bemerkung 2.1.3. Der erste Teil (betreffend ρ_L) von diesem zweiten Axiom wurde erst im 19. Jahrhundert von Moritz Pasch so formuliert und heisst deswegen auch *Paschs Axiom*. Damit soll nicht unbedingt gesagt sein, dass Euklid diese Forderung vergessen hat; aber es ist jedenfalls denkbar, dass er sie nur unklar ausgedrückt hat. Dass er Begriffe wie *Menge* und *Äquivalenzrelation* nicht hatte, ist übrigens keine gute Entschuldigung, denn es geht auch ohne diese Begriffe (siehe Übungsaufgaben).
Was ist gemeint mit: *die Isometrie* r_L *vertauscht die beiden Äquivalenzklassen*? Gemeint ist, dass für jedes $z \in X \setminus L$ gilt: $r_L(z) \in X \setminus L$ und $(z, r_L(z)) \notin \rho_L$. Anders ausgedrückt, das Segment $[z, r_L(z)]$ hat mindestens einen Punkt gemeinsam mit der Geraden L. (Übrigens ist es *genau ein* Punkt ... denn sonst hätte die Gerade durch z und $r_L(z)$ mindestens zwei Punkte gemeinsam mit L und müsste dann wegen Axiom I mit L übereinstimmen ... so dass insbesondere $z \in L$, Widerspruch.)
Die Isometrie r_L heisst *Spiegelung an der Geraden* L. Das Axiom II verlangt ausdrücklich nicht, dass sie eindeutig ist, so dass die Benutzung des bestimmten Artikels hier unvorsichtig ist. Wir werden später sehen, dass sie eben doch eindeutig ist. Das Axiom verlangt nicht, dass $r_l \circ r_L = \mathrm{id}$, aber wir werden später sehen, dass das auch gilt.
Diese Form von Axiom II stammt aus der ersten Ausgabe von Iversens Buch. In der neueren zweiten Ausgabe hat er Axiom II etwas anders formuliert. Mir gefällt aber die Formulierung der ersten Ausgabe besser.

Definition 2.1.4. Zwei Geraden L und L' in X heissen *parallel*, wenn entweder $L = L'$ oder $L \cap L' = \varnothing$. Wir schreiben manchmal $L \| L'$ dafür.

Axiom Euklid III. (*Es handelt sich um eine Bedingung an* X.) Zu jeder Geraden L in X und jedem $z \in X \setminus L$ existiert genau eine Gerade L' in X, die z enthält und parallel zu L ist.

Bemerkung 2.1.5. Axiom III ist das berüchtigte Parallelenaxiom (allerdings umformuliert, nicht so sehr von Iversen, sondern lange davor von Proklus). Im jahrtausendelangen Streit über dieses Axiom ging es darum, ob es aus den Axiomen I und II abgeleitet werden kann oder nicht. Wir werden bald sehen, dass man aus den Axiomen I und II leicht ableiten kann: *zu jeder Geraden* L *in* X *und jedem* $z \in X \setminus L$ *existiert mindestens eine Gerade* L' *in* X*, die* z *enthält und parallel zu* L *ist.* Also geht es bei Axiom III, und bei

[1] Zur Erinnerung: eine Relation auf einer Menge S ist eine Teilmenge von $S \times S$.

den Streitereien, eigentlich nur um die Eindeutigkeit einer Geraden L' mit den genannten Eigenschaften.
Übrigens können wir es auch so schreiben: *Zu jeder Geraden* L *in* X *und jedem* $z \in X$ *existiert genau eine Gerade* L' *in* X*, die* z *enthält und parallel zu* L *ist.* (Denn wenn $z \in L$, dann kommt ohnehin nur $L' := L$ in Frage.)

2.2. Überblick

— Es soll sehr bald gezeigt werden, dass der metrische Raum $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ (mit der euklidischen Metrik) die drei Axiome erfüllt. Das ist nicht schwer.

— Irgendwann später soll auch mal Folgendes gezeigt werden. Wenn ein metrischer Raum X die drei Axiome erfüllt, dann gibt es eine Isometrie von X nach $\mathbb{E}$. Das ist nicht sehr schwer, aber schon ganz interessant.

— Es soll bald gezeigt werden: es existiert ein metrischer Raum $\mathbb{H}$, der die Axiome I und II erfüllt, aber nicht Axiom III. (Name: die *hyperbolische Ebene.*) Damit wäre gezeigt, dass Axiom III nicht aus den Axiomen I und II folgt. Das ist auch nur mässig schwer (weil es andere im 19. Jahrhundert herausgefunden haben und weil wir nun schon fast die richtige Sprache dafür haben). Es erfordert aber ein paar neue Ideen und Begriffe. Also wieder ganz schön interessant.

— Schliesslich soll gezeigt werden: wenn ein metrischer Raum X die Axiome I und II erfüllt, aber nicht Axiom III, dann existiert eine positive reelle Zahl c und eine Bijektion $f\colon X \to \mathbb{H}$ derart, dass

$$d_X(y,z) = c \cdot d_{\mathbb{H}}(f(y), f(z))$$

für alle $y, z \in X$. (Das heisst, f ist eine Isometrie von X mit dem metrischen Raum, der aus $\mathbb{H}$ durch Multiplikation der Metrik mit dem Faktor c ensteht.) Das ist dann richtig schwer. Die Zahl c ist übrigens eindeutig, das heisst, durch den metrischen Raum X bestimmt (unter der Voraussetzung, dass X die Axiome I und II erfüllt, aber Axiom III verletzt).

Bemerkung 2.2.1. Für eine feste reelle Zahl $c > 0$ sei $\mathbb{E}_c$ der metrische Raum, der aus $\mathbb{E}$ ensteht durch Multiplikation der Metrik $d_{\mathbb{E}}$ mit c. Dann gibt es eine Isometrie f von $\mathbb{E}_c$ nach $\mathbb{E}$. Mit anderen Worten, f ist eine Bijektion von $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft

$$\forall y, \forall z \in \mathbb{E}: \qquad d_{\mathbb{E}}(f(y), f(z)) = c \cdot d_{\mathbb{E}}(y,z).$$

Man kann nämlich $f(y) = cy$ setzen, unter Benutzung der Vektorraumstruktur von $\mathbb{R}^2$.
Wenn man dasselbe mit $\mathbb{H}$ versucht, geht es schief, wie oben schon angedeutet. Für festes $c > 0$, $c \neq 1$, gibt es keine Bijektion $g\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, die $d_{\mathbb{H}}(g(y), g(z)) = c \cdot d_{\mathbb{H}}(y,z)$ erfüllt für alle $y, z \in \mathbb{H}$.

2.3. Die Euklidische Ebene $\mathbb{E}$ erfüllt die drei Axiome

Wir haben das meiste davon schon im Kapitel 1 gesehen. Beachten: $\mathbb{E}$ bedeutet $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Metrik,

$$d_{\mathbb{E}}(y,z) = \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2}.$$

Zu Axiom I: Gegeben $p, q \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{E}$, wobei $p \neq q$. Sei $a = d_{\mathbb{E}}(p,q)$. Setze $v := a^{-1}(q - p)$, mit Benutzung der Vektorraumstruktur von $\mathbb{R}^2$. Dann ist die Abbildung

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x) = p + xv$$

eine abstandserhaltende Abbildung (wie wir gezeigt haben). Demnach ist bild(f) eine Gerade in $\mathbb{E}$. Sie enthält p und q (wähle $x = 0$ und $x = a$).
Jetzt sei L irgendeine Gerade in $\mathbb{E}$, die p und q enthält. Wir wissen aus Beispiel 1.2.3, dass $L = \text{bild}(g)$ für eine Abbildung $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ von der Form

$$g(x) = s + xw$$

wobei $s\in\mathbb{R}^2$ und $w\in\mathbb{R}^2$ fest gewählt sind, $w_1^2 + w_2^2 = 1$. Dann gibt es $t\in\mathbb{R}$ und $t'\in\mathbb{R}$ mit

$$p = s + tw, \quad q = s + t'w.$$

Es folgt $t\neq t'$ und $v = a^{-1}(q-p) = a^{-1}(t'-t)w$, das heisst, v ist skalares Vielfaches von w, das heisst, $v = \pm w$ (weil beide die Länge 1 haben). OBdA ist $v = w$ (denn bild(g) ändert sich nicht, wenn wir w durch $-w$ ersetzen in der Formel für g). Dann haben wir $s = p - tw = p - tv$, also

$$g(x) = p - tv + xw = p - tv + xv = f(x-t)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$. Also ist bild$(g) = $ bild(f). □

Zu Axiom II, erster Teil, auch genannt Paschs Axiom: Die Gerade L ist das Bild einer abstandserhaltenden Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{E}$. Also ist $L = \text{bild}(f)$ wobei f die Form $f(x) = p + xv$ hat für eine beliebiges aber festes $p\in\mathbb{R}^2$ und ein festes $v\in\mathbb{R}^2$ mit $v_1^2 + v_2^2 = 1$. Sei $v^\perp = (-v_2, v_1)$, so dass $v^\perp$ wieder die Länge 1 hat und $v^\perp\cdot v = 0$ ist (Skalarprodukt von Vektoren bitteschön). Dann sind die Punkte auf der Geraden L genau diejenigen $w\in\mathbb{R}^2$, die die Gleichung

$$w\cdot v^\perp = p\cdot v^\perp$$

erfüllen. (Man kann auch schreiben: $(w-p)\cdot v^\perp = 0$, wodurch ausgedrückt ist, dass $w-p$ senkrecht zu $v^\perp$, also parallel zu v ... das ist gut.) Demnach sind die Punkte von $\mathbb{R}^2\smallsetminus L = \mathbb{E}\smallsetminus L$ genau diejenigen $w\in\mathbb{R}^2$, die eine der Ungleichungen

$$w\cdot v^\perp > p\cdot v^\perp, \qquad w\cdot v^\perp < p\cdot v^\perp$$

erfüllen. Sie kommen also in zwei Typen, solche mit $>$ und solche mit $<$. Gegeben seien jetzt w, w' in $\mathbb{R}^2\smallsetminus L$. Man rechnet leicht durch, dass das Segment $[w, w']$ (ein Teil der Geraden durch w und w') genau dann L nicht schneidet, wenn entweder $w\cdot v^\perp > p\cdot v^\perp$ und $w'\cdot v^\perp > p\cdot v^\perp$; oder aber $w\cdot v^\perp < p\cdot v^\perp$ und $w'\cdot v^\perp < p\cdot v^\perp$. Damit ist die Sache erledigt; die Äquivalenzklassen von ρ_L sind die Mengen $\{w\in\mathbb{R}^2 \mid w\cdot v^\perp > p\cdot v^\perp\}$ und $\{w\in\mathbb{R}^2 \mid w\cdot v^\perp < p\cdot v^\perp\}$.

Zu Axiom II, zweiter Teil: Existenz von Isometrie r_L. Sei K die erste Koordinatenachse in $\mathbb{R}^2$, die ja auch eine Gerade in X ist. Wir wählen erstmal eine Isometrie $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ derart, dass $h(K) = L$ ist. Genauer, wenn L das Bild der abstandserhaltenden Abbildung $(x\mapsto p + xv)$ ist, wie oben, dann kann h definiert werden durch $h(y) := p + y_1 v + y_2 v^\perp$ wobei $v^\perp$ wie oben.
Sei r_K die Isometrie mit $r_K(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$; das ist nämlich Spiegelung an der Geraden K. Dann hat $r_L := h\circ r_K\circ h^{-1}$ die gewünschten Eigenschaften. (Die beiden Äquivalenzklassen der Relation ρ_L sind dann $\{h(y) \mid y_2 > 0\}$ und $\{h(y) \mid y_2 < 0\}$, also die Bilder unter h der oberen Halbebene und der unteren Halbebene, ohne die erste Koordinatenachse.)

Zu Axiom III: Die Gerade L sei das Bild von $(x \mapsto p + xv)$, wie oben. Sei $q \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus L$. Dann ist das Bild der abstandserhaltenden Abbildung

$$x \mapsto q + xv$$

eine Gerade M, die $L \cap M = \varnothing$ erfüllt und q enthält. Denn wenn $L \cap M$ nicht leer wäre, dann hätten wir $p + xv = q + x'v$ für gewisse $x, x' \in \mathbb{R}$ und damit $q = p + (x - x')v$, so dass $q \in L$, Widerspruch.
Umgekehrt ist jede Gerade N, die q enthält, Bild einer abstandserhaltenden Abbildung der Form

$$x \mapsto q + xw$$

wobei $w \in \mathbb{R}^2$ mit $w_1^2 + w_2^2 = 1$. Wenn $L \cap N = \varnothing$ ist, dann hat das Gleichungssystem

$$q + xw = p + x'v$$

in den Unbekannten x und x' keine Lösung. Das geht aber nur, wenn w ein skalares Vielfaches von v ist, also $w = \pm v$ (weil beide die Länge 1 haben). Dann ist $N = M$. Also gibt es nur eine Gerade, die parallel zu L ist und q enthält. □

2.4. Übungsaufgaben

Aufgabe 2.4.1. Sei X die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ nach $\{0, 1\}$. Für $f \in X$ und $g \in X$ setzen wir $d_X(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}|f(k) - g(k)|$. (Das kam als Beispiel in Vorlesungsnotizen Woche 1.)
Ähnlich sei Y die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ nach $\{0, 1, 2\}$. Für $f \in Y$ und $g \in Y$ setzen wir $d_Y(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}|f(k) - g(k)|$.

(1) Zeigen Sie, dass d_X eine Metrik auf X ist. (Ebenso ist d_Y eine Metrik auf Y, aber das brauchen Sie dann nicht nochmal zu zeigen.)
(2) Zeigen Sie, dass es eine abstandserhaltende Abbildung von X nach Y gibt.
(3) —— , dass es keine abstandserhaltende Abbildung von Y nach X gibt.
(4) Erfinden Sie eine bijektive Abbildung $h: X \to Y$, die stetig ist und deren Inverse ebenfalls stetig ist.[2]

Aufgabe 2.4.2. Der metrische Raum $X = \mathbb{R}^3$ (mit der Euklidischen Metrik) erfüllt das Axiom Euklid I. Also kann für jede Gerade L in X die Relation ρ_L auf der Menge $X \smallsetminus L$ definiert werden (siehe Vorlesungsnotizen Woche 2, Vorspann zu Axiom Euklid II). Ist diese Relation transitiv? Wenn ja, wieviele Äquivalenzklassen hat sie?

Aufgabe 2.4.3. Sei X ein metrischer Raum, der Axiom Euklid I und Axiom Euklid II erfüllt.[3] Gegeben eine Gerade L in X und Elemente $u, v, w \in X$, die nicht zu L gehören. Zeigen Sie: Wenn L nichtleeren Schnitt mit dem Segment $[u, v]$ hat, dann muss es auch nichtleeren Schnitt mit mindestens einem der Segmente $[v, w]$ oder $[u, w]$ haben.[4]

[2] Dieser Aufgabenteil ist schwer, aber eigentlich nicht soooo wichtig für uns.

[3] Halten Sie sich dabei bitte an diese Vorlesungsnotizen, weil es bei Iversen etwas anders formuliert ist. Wir interessieren uns hier eigentlich nur für den Teil von Axiom Euklid II, der von der Relation ρ_L handelt.

[4] Sie dürfen sich die drei Segmente gerne als Kanten eines Dreiecks vorstellen. Gesagt wird also: wenn die Gerade L durch eine Kante des Dreiecks geht, dann muss sie auch noch durch eine andere Kante des Dreiecks gehen. Wir erlauben allerdings, dass die drei Elemente u, v, w auf einer Geraden liegen oder dass sie nicht alle verschieden sind.

CHAPTER 3

Konstruktion von metrischen Räumen

3.1. Kostenfunktionen und gewichtete Kurvenlänge

Definition 3.1.1. (*Stückweise glatte Kurve.*) Eine stetige Abbildung γ von einem Intervall $[a,b]$ nach $\mathbb{R}^n$ heisst stückweise glatt, wenn es endlich viele Elemente

$$t_0, t_1, t_2, \dots t_{k-1}, t_k \in [a,b]$$

gibt derart, dass $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ und γ eingeschränkt auf jedes Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ glatt (= unendlich oft differenzierbar) ist.

Beispiel 3.1.2. Die Abbildung $\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} (\sin(t), \cos(t)) \in \mathbb{R}^2 & \text{für } t \in [0,\pi/2] \\ (0, 1 - t + \pi/2) \in \mathbb{R}^2 & \text{für } t \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

ist stückweise glatt. (Erläuterung. Die Einschränkung von γ auf $[0,\pi/2]$ ist glatt, was man gerne glaubt, wenn man die Formel $\gamma(t) = (\sin(t), \cos(t))$ sieht. Hier können wir aber nur von den linksseitigen Ableitungen an der Stelle $\pi/2$ reden, während die rechtsseitigen als nicht sinnvoll oder nicht definiert betrachtet werden. Ebenso ist die Einschränkung von γ auf $[\pi/2,\pi]$ glatt, was man gerne glaubt, wenn man die Formel $\gamma(t) = (0, 1 - t + \pi/2)$ sieht. Hier können wir aber nur von den rechtsseitigen Ableitungen an der Stelle $\pi/2$ reden. Die Kurve γ insgesamt ist *nicht* glatt, weil an der Stelle $\pi/2$ die linksseitige erste Ableitung nicht mit der rechtsseitigen ersten Ableitung übereinstimmt.)

Definition 3.1.3. Man denke sich $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$. Die Länge einer glatten Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

(Im Fall $a = b$ setzen wir $L(\gamma) := 0$.) Etwas allemeiner: die Länge einer stückweise glatten Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit Unterteilungspunkten $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$ ist

$$L(\gamma) = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

(Man sollte sich überlegen, dass dieser Ausdruck wohldefiniert ist, denn die Menge der Unterteilungspunkte ist nicht eindeutig vorgegeben. Normalerweise wählt man nur diejenigen Stellen als Unterteilungpunkte aus, an denen γ tatsächlich nicht glatt ist.)

Lemma 3.1.4. *Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stückweise glatte Kurve und sei $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ eine glatte Funktion, die eine glatte Inverse besitzt, $\varphi^{-1}\colon [a,b] \to [c,d]$. Wir setzen voraus $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, also φ wachsend. Dann ist*

$$L(\gamma) = L(\gamma \circ \varphi).$$

(In Worten: Kurvenlänge ist unabhängig von Parameterisierung.)

Beweis. Übungsaufgabe. □

BEISPIEL 3.1.5. Sei $\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t)=(t,t)$. Sei

$$\zeta\colon[0,1000]\to\mathbb{R}^2$$

gegebn durch $\zeta(t)=(t/1000,t/1000)$. Dann ist $L(\gamma)=L(\zeta)=\sqrt{2}$. Beide Kurven beschreiben ein Segment von $(0,0)$ nach $(1,1)$.

Zur Erinnerung: eine Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ heisst *offen* in $\mathbb{R}^n$, wenn zu jedem $x\in U$ ein $\varepsilon>0$ existiert derart, dass alle $y\in\mathbb{R}^n$ mit $d(x,y)<\varepsilon$ zu U gehören. (Dabei ist d die Euklidische Metrik.)

BEISPIEL 3.1.6. Die Menge $\{x\in\mathbb{R}^2\mid x_2>0\}$ ist offen in $\mathbb{R}^2$. Dagegen ist $\{x\in\mathbb{R}^2\mid x_2\geq 0\}$ nicht offen in $\mathbb{R}^2$.

Sei jetzt U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $\Phi\colon U\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion, wobei $\Phi(x)>0$ für alle $x\in U$. Wir denken uns Φ als eine Art Kostenfunktion, die bestimmt, wie teuer es ist, sich in der Nähe von einem beliebigen $x\in U$ fortzubewegen (nämlich ungefähr so teuer: $\Phi(x)$ mal zurückgelegte Strecke). Weil sich die Gebühr ändern kann, während wir uns fortbewegen, müssen die Kosten so berechnet werden. Der Preis für eine Reise in U entlang einer glatten Kurve $\gamma\colon[a,b]\to U$ ist

$$L^\Phi(\gamma):=\int_a^b\Phi(\gamma(t))\cdot\|\gamma'(t)\|\ dt.$$

Wir nennen das auch die *gewichtete Kurvenlänge* von γ, bei Gewichtsfunktion Φ. (*Erklärung.* Die Preiszuwachsrate zum Zeitpunkt $t\in[a,b]$ sollte sein:

$$\Phi(\text{wo man ist zur Zeit } t)\cdot(\text{wie schnell man ist zur Zeit } t);$$

also $\Phi(\gamma(t))$ mal $\|\gamma'(t)\|$. Das müssen wir integrieren, um die Gesamtkosten zu ermitteln, denn Totalpreis ist gleich

$$\int_a^b\text{Preiszuwachsrate}(t)\ dt$$

nach dem Hauptsatz der Diff.- und Int.-Rechnung.) Etwas allgemeiner: wir erlauben, dass γ stückweise glatt ist, mit Unterteilungspunkten $a=t_0<t_1<\cdots<t_{k-1}<t_k=b$. Dann sagen wir: der Preis für eine Reise in U entlang Kurve γ ist

$$L^\Phi(\gamma)=\sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\Phi(\gamma(t))\cdot\|\gamma'(t)\|\ dt.$$

LEMMA 3.1.7. *Sei $\gamma\colon[a,b]\to U$ eine stückweise glatte Kurve und sei $\varphi\colon[c,d]\to[a,b]$ eine glatte Funktion, die eine glatte Inverse besitzt, $\varphi^{-1}\colon[a,b]\to[c,d]$. Wir setzen voraus $\varphi(c)=a$, $\varphi(d)=b$, also φ wachsend. Dann ist*

$$L^\Phi(\gamma)=L^\Phi(\gamma\circ\varphi).$$

(In Worten: Gewichtete Kurvenlänge ist unabhängig von Parameterisierung.)

Beweis. Übungsaufgabe. □

BEISPIEL 3.1.8. Frage: Gegeben $z\in U$ und $z'\in U$; wie kommen wir am billigsten von z nach z' ? Erlaubt sind Reisen im Sinne von stückweise glatten Kurven $\gamma\colon[a,b]\to U$ mit $\gamma(a)=z$ und $\gamma(b)=z'$. Der Preis für so eine Reise soll $L^\Phi(\gamma)$ sein.
Wir haben folgendes Beispiel ausprobiert: $U=\{x\in\mathbb{R}^2\mid x_2>0\}$ mit der Kostenfunktion Φ definiert durch

$$\Phi(x)=1/x_2$$

für alle $x \in U$. Sei $z = (0,1) \in U$ und $z' = (1000,1) \in U$. *Eine* mögliche Reise von z nach z ist gegeben durch die glatte Kurve $\gamma\colon [0,1000] \to U$ mit $\gamma(t) = (t,1)$. Kosten:

$$L^{\Phi}(\gamma) = 1000.$$

Das ist aber bestimmt nicht die billigste Reise. Eine andere Möglichkeit ist nämlich die stückweise glatte Kurve $\psi\colon [-1,1001]$ definiert durch $\psi(t) = (0, t+2)$ für $t \in [-1,0]$ und $\psi(t) = (t,2)$ für $t \in [0,1000]$ und $\psi(t) = (1000, 1002-t)$ für $t \in [1000,1001]$. Kosten: nur

$$L^{\Phi}(\psi) = (\ln 2) + 500 + (\ln 2).$$

Leider kann man sich schon denken, dass das auch nicht die billigste Reise von z nach z' ist. Also was ist nun die biligste Reise oder wieviel muss man im besten Fall bezahlen, um von z nach z' zu kommen ? Schwierig.

3.2. Eine besondere Art, metrische Räume zu konstruieren

Definition 3.2.1. Eine Teilmenge U von $\mathbb{R}^n$ heisst wegzusammenhängend, wenn es zu zwei beliebigen Punkten $x, y \in U$ eine stetige Abbbildung γ von $[0,1]$ nach U gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. (Ohne Beweis: wenn es so eine stetige Kurve γ gibt, dann gibt es auch eine glatte.)

Sei jetzt $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend. Die Frage nach der billigsten Reise (wie in Beispiel 3.1.8) ist schwer zu entscheiden, aber man kann etwas naseweis den Infimumpreis nennen:

$$d^{\Phi}(x,y) = \inf \{L^{\Phi}(\gamma) \mid \gamma \text{ stückweise glatte Kurve in } U \text{ von } x \text{ nach } y\}.$$

In Worten: $d^{\Phi}(x,y)$ ist das Infimum der gewichteten Kurvenlängen $L^{\Phi}(\gamma)$, die sich ergeben, wenn man von x nach y entlang Kurve γ reist ... wobei natürlich γ stückweise glatte Kurve in U von x nach y. Weil wir vorausgesetzt haben, dass U wegzusammenhängend ist, ist $d^{\Phi}(x,y)$ eine nichtnegative reelle Zahl.

Lemma 3.2.2. *Wenn* $\Phi \geq \Psi$, *dann* $d^{\Phi}(x,y) \geq d^{\Psi}(x,y)$. *Wenn* Φ *konstant,* $\Phi \equiv A$, *dann* $d^{\Phi}(x,y) \geq A \cdot d(x,y)$, *wobei* d *die Euklidische Metrik bezeichnet.*

Beweis. Der erste Teil ist klar. Sei nun Φ konstant, also $\Phi(z) = A$ für alle $z \in U$, wobei $A > 0$. Gegeben $x, y \in U$ mit $x \neq y$ und eine glatte Kurve $\gamma\colon [a,b] \to U$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Wir schreiben

$$\gamma(t) = \gamma(a) + \alpha(t) + \beta(t)$$

wobei $\alpha(t) \in \mathbb{R}^n$ parallel zu $y - x$ ist und $\beta(t) \in \mathbb{R}^n$ senkrecht zu $y - x$. (Das heisst, wir zerlegen für jedes $t \in [a,b]$ den Vektor $\gamma(t) - \gamma(a)$ in einen Teil, der parallel zu $y - x$ ist, und einen anderen Teil, der senkrecht zu $y - x$ ist. Diese Zerlegung ist eindeutig.) Dann ist

$$L^{\Phi}(\gamma) = \int_a^b A \cdot \|\gamma'(t)\| \ dt = \int_a^b A \cdot \|\alpha'(t) + \beta'(t)\| \ dt \geq \int_c^d A \cdot \|\alpha'(t)\| \ dt.$$

Jetzt schreiben wir noch $\alpha(t) = \psi(t)(y - x)$ mit $\psi(t) \in \mathbb{R}$, so dass speziell $\psi(a) = 0$ und $\psi(b) = 1$. Dann erhalten wir

$$\int_a^b A \cdot \|\alpha'(t)\| \ dt = \int_a^b A \cdot \|\psi'(t)\| \cdot \|y - x\| \ dt = A\|y - x\| \int_a^b \|\psi'(t)\| \ dt$$

$$\geq A\|y - x\| \int_a^b \psi'(t) \ dt = A\|y - x\|(\psi(b) - \psi(a)) = A\|y - x\| = A \cdot d(x,y).$$

Also zusammengenommen $L^\Phi(\gamma) \geq A \cdot d(x,y)$. Eine ähnliche Rechnung (mit mehr Summenzeichen) ergibt dieselbe Abschätzung bei *stückweise* glatter Kurve γ. Deswegen

$$d^\Phi(x,y) = \inf_\gamma \{L^\Phi(\gamma) \mid \gamma \text{ stü.gl.Kve in } U \text{ von } x \text{ nach } y\} \geq A \cdot d(x,y)$$

wie behauptet. □

THEOREM 3.2.3. *Die eben und oben definierte Funktion* $d^\Phi: U \times U \to \mathbb{R}$ *ist eine Metrik auf* U.

Beweis. Symmetrieeigenschaft. Wenn $\gamma: [a,b] \to U$ eine stückweise glatte Kurve in U von x nach y ist, dann ist $\bar{\gamma}: [a,b] \to U$ definiert durch $\bar{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t)$ eine stückweise glatte Kurve in U von y nach x. Auf diese Weise hat man eine bijektive Korrespondenz zwischen den stückweise glatten Kurven in U von x nach y und den stückweise glatten Kurven in U von y nach x. Ausserdem rechnet man nach, dass

$$L^\Phi(\gamma) = L^\Phi(\bar{\gamma}).$$

Damit ist klar, dass $d^\Phi(x,y) = d^\Phi(y,x)$.
Dreiecksungleichung. Wenn $\beta: [a,b] \to U$ eine stückweise glatte Kurve in U von x nach y ist und $\gamma: [a',b'] \to U$ eine stückweise glatte Kurve in U von y nach z, dann können wir eine stückweise glatte Kurve

$$\gamma * \beta: [0, b-a+b'-a'] \to U$$

definieren wie folgt: $t \mapsto \beta(t+a)$ falls $t \in [0, b-a]$ und $t \mapsto \gamma(t+a-b+a')$ falls $t \in [b-a, b-a+b'-a']$. Dann ist $\gamma * \beta$ eine stückweise glatte Kurve von x nach z und es ist leicht zu sehen, dass

$$L^\Phi(\gamma * \beta) = L^\Phi(\gamma) + L^\Phi(\beta).$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
d^\Phi(x,z) &= \inf\{L^\Phi(\alpha) \mid \alpha \text{ stückweise glatte Kurve in } U \text{ von } x \text{ nach } z\} \\
&\leq \inf\{L^\Phi(\gamma * \beta) \mid \beta \text{ in } U \text{ von } x \text{ nach } y \text{ und } \gamma \text{ in } U \text{ von } y \text{ nach } z\} \\
&= \inf\{L^\Phi(\gamma) + L^\Phi(\beta) \mid \beta \text{ in } U \text{ von } x \text{ nach } y \text{ und } \gamma \text{ in } U \text{ von } y \text{ nach } z\} \\
&= d^\Phi(x,y) + d^\Phi(y,z).
\end{aligned}$$

Nullabstand. Es ist klar, dass $d^\Phi(x,x) = 0$ für alle $x \in U$. Aber wir müssen noch zeigen: wenn $x,y \in U$ und $x \neq y$, dann ist $d^\Phi(x,y) > 0$. Das ist nicht einfach. Wir halten dazu x und y fest. Sei V ein offener Ball vom Radius δ um x (im Sinn der Euklidischen Metrik). Wir wählen dabei δ so klein, dass $V \subset U$ und $\Phi(z) > \Phi(x)/2$ für alle $z \in V$ gilt, und ausserdem $y \notin V$. Für eine stückweise glatte Kurve $\gamma: [a,b] \to U$ existiert das Minimum t_0 von

$$\{t \in [a,b] \mid \|\gamma(t) - x\| \geq \delta/2\}.$$

(Warum?) Dann ist

$$L^\Phi(\gamma) \geq L^\Phi(\gamma|_{[a,t_0]}) \geq (\Phi(x)/2) \cdot d(x, \gamma(t_0)) = (\Phi(x)/2) \cdot (\delta/2).$$

Für die zweite Ungleichung benutzen wir Lemma 3.2.2 und bedenken dabei, dass der Kurventeil $\gamma|_{[a,t_0]}$ ganz in V verläuft. — Also ist

$$d^\Phi(x,y) \geq \Phi(x) \cdot \delta/4 > 0. \quad \square$$

3.3. Übungsaufgaben

AUFGABE 3.3.1. Ist die folgende Aussage richtig? *Eine stetige Abbildung* $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ *ist genau dann stückweise glatt, wenn es eine endliche Teilmenge* S *von* $[a,b]$ *gibt derart, dass* γ *an jedem Punkt von* $[a,b]\smallsetminus S$ *unendlich oft differenzierbar ist.*

AUFGABE 3.3.2. Zeigen, dass Kurvenlänge und gewichtete Kurvenlänge unabhängig von Parameterisierung sind. (Siehe Lemma 3.1.4 und Lemma 3.1.7.)

AUFGABE 3.3.3. Sei U eine offene wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und sei $\Phi\colon U\to\mathbb{R}$ die konstante Funktion mit $\Phi(x)=1$ für alle $x\in U$. Die Metrik d^Φ auf U (Theorem 3.2.3) muss nicht mit der Euklidischen Metrik auf U übereinstimmen. Geben Sie ein Beispiel von nichtleerem U, so dass die beiden Metriken übereinstimmen, und ein anderes Beispiel von nichtleerem U, so dass die beiden Metriken nicht übereinstimmen.

AUFGABE 3.3.4. (*Schwer.*) Sei $U=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x_2\}$ und sei $\Phi\colon U\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(x)=\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\ .$$

Zeigen Sie, dass es eine Isometrie gibt von U mit der Metrik d^Φ nach U mit der Euklidischen Metrik.[1]
Was ist demnach $d^\Phi(z,z')$ wenn $z=(0,1)$ und $z'=(1,3)$? Wie kann eine Kurve γ in U aussehen, die z mit z' verbindet und deren gewichtete Länge $L^\Phi(\gamma)$ genau dieser Abstand $d^\Phi(z,z')$ ist? Zeichnung erwünscht.

[1] Hinweis. Erstmal Aufgabe 3.3.3 bedenken. Dann: sei $f\colon U\to U$ so eine Isometrie. Wenn sie glatt ist, sollte gelten $\|(f\circ\gamma)'(t)\|=\|\gamma'(t)\|/\|\gamma(t)\|^2$ für beliebige glatte Kurve γ und alle t im Def.bereich von γ. Warum wäre das gut? Und was sagt das über die erste(n) Ableitung(en) von f aus? Kettenregel bedenken.

CHAPTER 4

Die hyperbolische Ebene

4.1. Die hyperbolische Ebene als metrischer Raum

Definition 4.1.1. Die hyperbolische Ebene ist

$$\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$$

mit der Metrik d^Φ bestimmt (wie in Kapitel 3) durch die Kosten- oder Gewichtsfunktion Φ, wobei $\Phi(x) = 1/x_2$ für $x \in \mathbb{H}$. Also ist für Elemente x und y von $\mathbb{H}$ der Abstand $d^\Phi(x,y)$ das Infimum der Zahlen $L^\Phi(\gamma)$, genommen über alle stückweise glatten Kurven $\gamma\colon[a,b] \to \mathbb{H}$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Zur Erinnerung: im Fall von glatter Kurve γ ist

$$L^\Phi(\gamma) = \int_a^b \Phi(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_a^b \frac{\|\gamma'(t)\|}{\gamma_2(t)} \, dt$$

bei dieser Kostenfunktion, $\Phi(x) = 1/x_2$. (Dabei bezeichnet $\gamma_2(t)$ die zweite Koordinate von $\gamma(t)$.) Wenn γ stückweise glatt ist, muss man eine etwas kompliziertere Formel mit Summenzeichen hinschreiben.

Diese Definition ist sehr langwierig, und wir haben schon gesehen, dass die explizite Bestimmung der Abstände $d^\Phi(x,y)$ manchmal schwierig ist. Wir werden aber auch noch sehen, dass diese langwierige Definition einen Vorteil hat: sie macht es uns leicht, viele Isometrien von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$ zu konstruieren. Damit können wir die Berechnung von Abständen $d^\Phi(x,y)$ für beliebige x und y auf einfache Spezialfälle zurückführen. Diese Spezialfälle kommen jetzt dran.

Lemma 4.1.2. *Für x und y aus $\mathbb{H}$ mit $x_1 = y_1$ ist*

$$d^\Phi(x,y) = |\ln y_2 - \ln x_2| \, .$$

Beweis. OBdA ist $y_2 \geq x_2$. Sei $\beta\colon[a,b] \to \mathbb{H}$ irgendeine stückweise glatte Kurve von x nach y. Wir sollten erstmal zeigen, dass $L^\Phi(\beta) \geq \ln y_2 - \ln x_2$. Ich tue das unter der Annahme, dass β glatt ist; der allgemeine Fall ist ähnlich. Dann haben wir

$$L^\Phi(\beta) = \int_a^b \frac{\|\beta'(t)\|}{\beta_2(t)} \, dt \geq \int_a^b \frac{\|\beta_2'(t)\|}{\beta_2(t)} \, dt \geq \int_a^b \frac{\beta_2'(t)}{\beta_2(t)} \, dt$$

$$= \ln(\beta_2(t))\Big|_{t=a}^{t=b} = \ln y_2 - \ln x_2 \, .$$

Gut. Wenn jetzt $\beta_1'(t)$ immer Null ist und $\beta_2'(t)$ immer ≥ 0, dann werden die Zeichen $\geq$ in diesen Abschätzungen zu Gleichheitszeichen, und wir sehen $L^\Phi(\beta) = \ln y_2 - \ln x_2$. (Wir können zB definieren $\beta\colon[0,1] \to \mathbb{H}$ mit $\beta(t) = (x_1, x_2 + t(y_2 - x_2))$, um all das zu erreichen.) $\square$

Korollar 4.1.3. *Für festes* $a \in \mathbb{R}$ *ist die Abbildung* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ *definiert durch* $f(t) = (a, \exp(t))$ *abstandserhaltend (mit der Standardmetrik auf* $\mathbb{R}$*). Also ist ihr Bild*

$$\{x \in \mathbb{H} \mid x_1 = a\}$$

eine Gerade in $\mathbb{H}$ (gemäss Definition 2.1.1).

Beweis. $d^\Phi(f(t), f(s)) = |\ln(\exp(t)) - \ln(\exp(s))| = |t - s|$. □

Bemerkung 4.1.4. Der Beweis von Lemma 4.1.2 beweist noch etwas mehr, als behauptet wurde. Wir haben gesehen: es gibt (unter den Voraussetzungen des Lemmas) eine glatte Kurve β von x nach y in $\mathbb{H}$, für die $L^\Phi(\beta) = d^\Phi(x, y)$ gilt. (Das heisst, obwohl wir $d^\Phi(x, y)$ als Infimum von gewissen gewichteten Kurvenlängen definiert hatten, wissen wir jetzt: das Infimum ist ein Minimum.) Ausserdem: wenn β eine glatte Kurve von x nach y ist, bei der β_1 nicht konstant ist, die also nicht $\beta_1'(t) = 0$ erfüllt für alle t, dann ist $L^\Phi(\beta) > d^\Phi(x, y)$ (strikte Ungleichung). Denn dann ist eine der Ungleichungen in unseren Abschätzungen strikt:

$$\int_a^b \frac{\|\beta'(t)\|}{\beta_2(t)}\, dt > \int_a^b \frac{\|\beta_2'(t)\|}{\beta_2(t)}\, dt.$$

Diese Bemerkung, $L^\Phi(\beta) > d^\Phi(x, y)$ falls β_1 nicht konstant, gilt auch wieder im stückweise glatten Fall.

4.2. Selbst-Isometrien der hyperbolischen Ebene

Um einige interessante Isometrien von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$ zu beschreiben, benutzen wir komplexe Zahlen. Insbesondere werden dabei die Elemente (x_1, x_2) von $\mathbb{H}$ als komplexe Zahlen $z = x_1 + x_2 i$ mit positivem Imaginärteil x_2 aufgefasst. Die Abbildungen f von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$, die wir betrachten wollen, haben die Gestalt

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

für $z \in \mathbb{H}$, wobei a, b, c, d feste reelle Zahlen sind mit $ad - bc = 1$. Die Division muss in $\mathbb{C}$ ausgeführt werden! Zur Erinnerung oder Belehrung, falls nötig:

- Eine komplexe Zahl $w = k + \ell i$ hat einen Realteil $k = \operatorname{Re} w \in \mathbb{R}$ und einen Imaginärteil $\ell = \operatorname{Im} w \in \mathbb{R}$. Warnung: Der Imaginärteil von $w = k + \ell i$ ist eine *reelle* Zahl, nämlich ℓ.
- Der *Betrag* von w ist $|w| = \sqrt{k^2 + \ell^2} \in \mathbb{R}$.
- Addition von komplexen Zahlen wird koordinatenweise durchgeführt. Beispiel: $(3 + 5i) + (2 - 7i) = 5 - 2i$. Analog dazu: Subtraktion koordinatenweise.
- Bei der Multiplikation von komplexen Zahlen benutzen Sie bitte das Distributivgesetz und denken Sie daran, dass $i^2 = -1$ sein soll, genauer gesagt, $(0 + 1i)^2 = -1 + 0i$. Beispiel: $(3 + 5i)(2 + 7i) = 6 + 35i^2 + 10i + 21i = -29 + 31i$.
- Der Betrag von einem Produkt ist das Produkt der Beträge; also $|uv| = |u| \cdot |v|$. Beweis: Nachrechnen.
- Die *Konjugierte* von $w = k + \ell i$ ist $\bar{w} = k - \ell i$. Die Konjugierte von einem Produkt ist das Produkt der Konjugierten; die Konjugierte von einer Summe ist die Summe der Konjugierten.
- Wenn eine komplexe Zahl w nicht Null ist, dann erhebt sich die Frage, wie man w^{-1} bestimmt. Man findet w^{-1} meist am leichtesten in der Form

$$w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}.$$

Und Teilen durch w ist dasselbe wie Multiplizieren mit $1/w$.

- Wie schon angedeutet: statt $k+0i$ schreiben wir gerne k. Auf diese Weise wird $\mathbb{R}$ mit einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ gleichgesetzt (d.h. eine reelle Zahl ist eine komplexe Zahl w mit Im $w = 0$). Statt $0+\ell i$ schreiben wir gerne ℓi. Statt $0+1i$ schreiben wir gerne i. Undsoweiter.

Beispiel 4.2.1.

$$\frac{1+5i}{3-2i} = \frac{(1+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{(3-10)+(15+2)i}{9+4} = \frac{7}{13} + \frac{17}{13}i\,.$$

Beispiel 4.2.2. $a, b, c, d = 1, -2, 3, -5$ und $z = 2 + i = 2 + 1i$. Dann ist

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{1(2+i)-2}{3(2+i)-5} = \frac{i}{1+3i} = \frac{i(1-3i)}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i.$$

Bemerkung 4.2.3. Für eine Matrix mit reellen Einträgen

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

mit $\det(M) = 1$ und ein $z \in \mathbb{H}$ definieren wir versuchsweise

$$f_M(z) := \frac{az+b}{cz+d}\,.$$

Dann stellt sich heraus:

(i) f_M ist eine wohldefinierte und stetige Abbildung von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$;
(ii) $f_M \circ f_N = f_{MN}$, wobei MN das Matrixprodukt bezeichnet;
(iii) $f_{I_2} = \mathrm{id}$ für die Identitätsmatrix I_2.

Aus (ii) folgt, dass jedes f_M eine invertierbare stetige Abbildung von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$ definiert; als Inverse bietet sich nämlich f_N an, wobei $N = M^{-1}$.
Erklärung von (i). Sei $z \in \mathbb{H}$ und $w = f_M(z)$. Wir bemerken erstmal, dass $cz+d \neq 0$, denn sonst $0 = \mathrm{Im}\,(cz+d) = c \cdot \mathrm{Im}\, z$, damit $c = 0$, und dann $d = 0$. Weiter: Die Konjugierte von $cz+d$ ist $c\bar{z}+d$, daher

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2},$$

so dass

$$\mathrm{Im}\, w = \frac{(ad-bc)\mathrm{Im}\, z}{|cz+d|^2} = \frac{\mathrm{Im}\,(z)}{|cz+d|^2}\,.$$

Also ist Im $w > 0$, weil Im $z > 0$.
Die Aussagen (ii) und (iii) können durch Nachrechnen bestätigt werden.

Theorem 4.2.4. *Jedes f_M wie in Bemerkung 4.2.3 ist eine Isometrie von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$, wobei $\mathbb{H}$ mit der Metrik d^Φ ausgestattet ist wie in Definition 4.1.1.*

Beweis. Wegen Bemerkung 4.2.3 ist f_M eine Bijektion von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$, denn eine inverse Abbildung dazu ist f_N mit $N = M^{-1}$.
Die erste Ableitung von f_M ist

$$f'_M(z) = \frac{a(cz+d)-(az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

nach der Quotientenregel. Man darf die Quotientenregel hier etwa so benutzen, wie man sie aus der reellen Analysis kennt, weil die Abbildungen $z \mapsto az+b$ und $z \mapsto cz+d$ *komplex* differenzierbar sind[1]. Andererseits haben wir schon herausgefunden (in Bemerkung 4.2.3):

$$\mathrm{Im}\,(f_M(z)) = \frac{\mathrm{Im}\, z}{|cz+d|^2}\,.$$

(Diese beiden Formeln, für $f'_M(z)$ und für $\mathrm{Im}\,(f_M(z))$, sind ungeheuer nützlich.) Sei jetzt $\gamma\colon[p,q] \to \mathbb{H}$ eine glatte Kurve. Dann ist auch $f_M \circ \gamma$ eine glatte Kurve. Die Kettenregel ergibt

$$(f_M \circ \gamma)'(t) = f'_M(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

wobei die rechte Seite als Produkt von komplexen Zahlen gelesen werden darf und auch muss. Mit den Rechnungen oben erhalten wir für die gewichteten Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned}\frac{|(f_M \circ \gamma)'(t)|}{\mathrm{Im}\,(f_M(\gamma(t)))} &= \frac{|f'_M(\gamma(t))|\cdot|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}\,(f_M(\gamma(t)))} \\ &= \frac{|c\gamma(t)+d|^2|f'_M(\gamma(t))|\cdot|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}\,(\gamma(t))} \\ &= \frac{|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}\,(\gamma(t))}.\end{aligned}$$

(Es ist ganz lustig, dass ich hier $|...|$ statt $\|...\|$ schreiben durfte. Der Betrag tut für Elemente von $\mathbb{C}$ dasselbe wie die Norm $\|...\|$ für Elemente von $\mathbb{R}^2$.) Wenn wir $\int_p^q$ davorschreiben und dt dahinter, ergibt sich für die gewichteten Kurvenlängen

$$L^\Phi(f_M \circ \gamma) = L^\Phi(\gamma).$$

Dieselbe Beziehung ergibt sich für stückweise glatte Kurven γ (mit mehr Schreibarbeit wegen Summenzeichen). Da Zusammensetzung mit f_M eine Bijektion von der Menge der stückweise glatten Kurven γ in $\mathbb{H}$ von u nach w in die Menge der stückweise glatten Kurven in $\mathbb{H}$ von $f_M(u)$ nach $f_M(v)$ ergibt, dürfen wir schliessen

$$d^\Phi(f_M(u), f_M(w)) = d^\Phi(u, w).$$

□

4.3. Bestimmung von Abständen in der hyperbolischen Ebene

LEMMA 4.3.1. *Sei* $z, u \in \mathbb{H}$ (komplexe Bezeichnungen, $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$) *und*

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

eine Matrix mit reellen Einträgen, $\det(M) = 1$ *wie in Bemerkung 4.2.3. Dann ist*

$$\frac{|z-u|}{(\mathrm{Im}\, z)^{1/2}(\mathrm{Im}\, u)^{1/2}} = \frac{|f_M(z) - f_M(u)|}{(\mathrm{Im}\, f_M(z))^{1/2}(\mathrm{Im}\, f_M(u))^{1/2}}.$$

[1]Dabei sollte $f'_M(z)$ als *lineare Abbildung* von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden, oder, wenn eine weniger gesunde Sichtweise vorgezogen wird, als 2×2-Matrix mit reellen Einträgen — die Matrix der ersten partiellen Ableitungen, auch Jacobi-Matrix genannt. Die rechte Seite $(cz+d)^{-2}$ muss demnach auch als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden, und das geht. Denn Multiplikation mit einer komplexen Zahl $k + \ell i$ ist tatsächlich eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Ihre Matrix ist

$$\begin{bmatrix} k & -\ell \\ \ell & k \end{bmatrix}.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

LEMMA 4.3.2. *Für beliebige* $z, u \in \mathbb{H}$ *existiert eine Matrix* M *wie in Bemerkung 4.2.3 derart, dass* $\mathrm{Re}\,(f_M(z)) = 0$ *und* $\mathrm{Re}\,(f_M(u)) = 0$ (für diese speziellen z und u).

Beweis. Wieder Übungsaufgabe. Diese Aufgabe lässt sich allerdings in folgende Schritte zerlegen (unter Benutzung der Formel $f_{XY} = f_X \circ f_Y$ in Bemerkung 4.2.3.)

1. Finde Matrix P derart, dass $\mathrm{Re}\,(f_P(z)) = 0$ für das gegebene z. Das ist leicht, denn wir können P von der Form
$$P = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
nehmen. Dann ist $f_P(y) = y + b$ für *alle* $y \in \mathbb{H}$. Wenn wir also $b = -\mathrm{Re}\, z$ wählen (für unser *spezielles* z), dann ist $\mathrm{Re}\,(f_P(z)) = 0$.
2. Schreibe $f_P(z) = ri$ für ein positives reelles r. Konstruiere Matrix Q derart, dass $f_Q(i) = ri$. Dann ist
$$f_{Q^{-1}P}(z) = (f_Q)^{-1}(f_P(z)) = f_{Q^{-1}}(ri) = i.$$
3. Setze $w = f_{Q^{-1}P}(u)$. Finde Matrix N derart, dass $f_N(i) = i$ und $\mathrm{Re}\,(f_N(w)) = 0$. Dann ist
$$f_{NQ^{-1}P}(z) = f_N(i) = i,$$
$$\mathrm{Re}\,(f_{NQ^{-1}P}(u)) = \mathrm{Re}\,(f_N(f_{Q^{-1}P}(u)) = \mathrm{Re}\,(f_N(w)) = 0.$$
Also ist $M = NQ^{-1}P$ eine Lösung. □

KOROLLAR 4.3.3. *Für den Abstand* $d^{\Phi}(u,z)$ *von* $u, z \in \mathbb{H}$ *gilt:*
$$\cosh\left(d^{\Phi}(u,z)\right) = 1 + \frac{|z-u|^2}{2(\mathrm{Im}\ z)(\mathrm{Im}\ u)}.$$

Beweis. Erstmal in Erinnerung rufen, dass $\cosh(t) = (\exp(t) + \exp(-t))/2$ für $t \in \mathbb{R}$. Die cosh-Funktion (Cosinus Hyperbolicus) ist injektiv nach Einschränkung auf die nichtnegativen reellen Zahlen. — Wir suchen uns dann eine Matrix M wie in Lemma 4.3.2, so dass $\mathrm{Re}\,(f_M(u)) = 0 = \mathrm{Re}\,(f_M(z))$. Weil f_M eine Isometrie ist, Theorem 4.2.4, haben wir
$$d^{\Phi}(f_M(u), f_M(z)) = d^{\Phi}(u,z).$$
Aber wegen Lemma 4.3.1 gilt auch
$$1 + \frac{|f_M(z) - f_M(u)|^2}{2(\mathrm{Im}\ f_M(z))(\mathrm{Im}\ f_M(u))} = 1 + \frac{|z-u|^2}{2(\mathrm{Im}\ z)(\mathrm{Im}\ u)}.$$
Das heisst, es genügt uns jetzt, zu zeigen, dass
$$\cosh\left(d^{\Phi}(f_M(z), f_M(u))\right) = 1 + \frac{|f_M(z) - f_M(u)|^2}{2(\mathrm{Im}\ f_M(z))(\mathrm{Im}\ f_M(u))}.$$
Sieht so aus wie vorher, nur mit $f_M(u)$ und $f_M(z)$ anstelle von u und z. Wir können jetzt sagen: $f_M(z)$ ist "das neue" z und $f_M(u)$ ist "das neue" u. Fortschritt: wir haben damit auf den Spezialfall reduziert, dass (die neuen) z und u Realteil gleich Null haben. Unter dieser zusätzlichen Voraussetzung, also $\mathrm{Re}\ u = 0 = \mathrm{Re}\ z$, haben wir aber schon eine ausgezeichnete Formel für $d^{\Phi}(u,z)$. Angenommen $u = pi$ und $z = qi$ für gewisse positive reelle p, q, und oBdA ist $p \geq q$. Die Formel ist dann $d^{\Phi}(u,z) = \ln p - \ln q = \ln(p/q)$. Das

ist (ein Spezialfall von) Lemma 4.1.2 in komplexer Schreibweise. Jetzt muss also nur noch gezeigt werden

$$\cosh(\ln(p/q)) = 1 + \frac{(p-q)^2}{2pq}.$$

Aber das ist leicht. □

BEISPIEL 4.3.4. Wir hatten den Fall $u = i = 0 + 1i$ und $z = 1000 + i$ betrachtet. Eine erste grobe Abschätzung ergab $d^\Phi(u,z) \le 1000$ und eine zweite weniger grobe Abschätzung ergab

$$d^\Phi(u,z) \le 500 + 2(\ln 2).$$

Wir hatten dazu Kurven γ von u nach z konstruiert und ihre gewichtete Kurvenlänge $L^\Phi(\gamma)$ bestimmt, wussten aber nicht recht, ob wir damit dem Infimum solcher gewichteten Kurvenlängen einigermassen nahegekommen waren. (Man hätte es bestimmt besser machen können mit derselben Strategie.) Jetzt stellt sich jedenfalls heraus: dieses Infimum, genannt $d^\Phi(u,z)$, erfüllt

$$\cosh(d^\Phi(u,z)) = 1 + \frac{|z-u|^2}{2(\mathrm{Im}\ z)(\mathrm{Im}\ u)} = 1 + \frac{10^6}{2} = 500\,001.$$

Mein Rechner sagt dazu, dass

$$d^\Phi(u,z) \approx 13{,}815512557961274110774597894823.$$

4.4. Übungsaufgaben

In diesen Aufgaben geht es hauptsächlich um Selbst-Isometrien von $\mathbb{H}$. Bitte tapfer sein im Umgang mit komplexen Zahlen. Hier werden Bezeichnungen benutzt, wie bei komplexen Zahlen üblich; wenn da zB irgendwo $|z|$ geschrieben steht, dann sollen Sie damit rechnen, dass der Betrag einer komplexen Zahl z gemeint ist.

AUFGABE 4.4.1. Aus der Formel für $f'_M(z)$ im Beweis von Theorem 4.2.4 ergibt sich, dass das nur von der zweiten Zeile der Matrix M (und von z) abhängt. Wenn nun M und N zwei Matrizen sind wie in Theorem 4.2.4, deren zweite Zeilen übereinstimmen, was könnte man demnach für eine Beziehung zwischen den Abbildungen f_M und f_N vemuten? Kann das durch direktes Nachrechnen bestätigt werden?

AUFGABE 4.4.2. Sei $z, u \in \mathbb{H}$ (komplexe Bezeichnungen, d.h. wir sagen $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$) und

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

eine Matrix mit reellen Einträgen, $\det(M) = 1$ wie in Bemerkung 4.2.3. Zeigen Sie

$$|z-u| = |f_M(z) - f_M(u)| \cdot |cz+d| \cdot |cu+d|$$

und schliessen Sie daraus (zB mit Zitat aus Vorlesungsnotizen), dass

$$\frac{|z-u|}{(\mathrm{Im}\ z)^{1/2}(\mathrm{Im}\ u)^{1/2}} = \frac{|f_M(z) - f_M(u)|}{(\mathrm{Im}\ f_M(z))^{1/2}(\mathrm{Im}\ f_M(u))^{1/2}}.$$

AUFGABE 4.4.3. (i) Welche zusätzlichen Bedingungen muss eine Matrix M wie in Bemerkung 4.2.7 erfüllen, damit $f_M(i) = i$?
(ii) Gegeben reelle Zahl $r > 0$. Eine Matrix M wie in Bemerkung 4.2.7 soll gefunden werden, so dass $f_M(i) = ri$.

(iii) Zeigen: für jedes $z \in \mathbb{H}$ existiert[2] Matrix M wie in Bemerkung 4.2.3 derart, dass $f_M(i) = i$ wie in Teil (i) dieser Aufgabe und ausserdem Re $(f_M(z)) = 0$ für dieses z.

AUFGABE 4.4.4. Das Produkt einer reellen 4×5-Matrix P und einer reellen 5×3-Matrix Q ist bekanntlich eine reelle 4×3-Matrix PQ. Die Definition von PQ ist etwas kompliziert. Warum ist sie eigentlich so, wie sie ist? Haben Sie darauf eine gute Antwort?

AUFGABE 4.4.5. Jeder komplexen Zahl $z = p + qi$ soll die reelle 2×2-Matrix

$$N(z) = \begin{bmatrix} p & -q \\ q & p \end{bmatrix}$$

zugeordnet werden. Man zeige, dass $N(wz) = N(w) \cdot N(z)$ (Matrixprodukt) und $N(w+z) = N(w) + N(z)$ ist für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Ausserdem ist $N(1) = I_2$ und $N(0)$ ist die 0-Matrix. Demnach ist $z \mapsto N(z)$ ein Ringhomomorphismus von $\mathbb{C}$ in den Ring der reellen 2×2-Matrizen. Er ist offensichtlich injektiv.

[2] Existenzbeweis ist genug. Notfalls Zwischenwertsatz an geeigneter Stelle benutzen.

CHAPTER 5

Die hyperbolische Ebene und die Axiome

5.1. Die hyperbolische Ebene erfüllt Axiom I

LEMMA 5.1.1. *Wenn drei verschiedene Elemente* $u, v, w \in \mathbb{H}$ *zusammen die Gleichung*

$$d^{\Phi}(u,v) + d^{\Phi}(v,w) = d^{\Phi}(u,w)$$

erfüllen, und zwei von ihnen Realteil $= 0$ *haben, dann hat auch das dritte Realteil* $= 0$.

Beweis. Fall 1: wir nehmen an, dass Re $u = 0 =$ Re w, aber Re $v \neq 0$. Sei $v' \in \mathbb{H}$ das Element mit Im $v' =$ Im v und Re $v = 0$. Dann ist $|v - u| > |v' - u|$ und $|v - w| > |v' - w|$ wegen Pythagoras. Aus unserer Formel für $\cosh(d^{\Phi}(...))$ folgt dann, dass

$$\cosh(d^{\Phi}(v,u)) > \cosh(d^{\Phi}(v',u)), \quad \cosh(d^{\Phi}(v,w)) > \cosh(d^{\Phi}(v',w)).$$

Dann ist auch

$$d^{\Phi}(v,u)) > d^{\Phi}(v',u), \quad d^{\Phi}(v,w) > d^{\Phi}(v',w)$$

weil die cosh-Funktion eingeschränkt auf die nicht-negativen reellen Zahlen wachsend ist. Die Dreiecksungleichung für die Metrik d^{Φ} gibt uns ausserdem

$$d^{\Phi}(v',u) + d^{\Phi}(v',w) \geq d^{\Phi}(u,w),$$

so dass $d^{\Phi}(v,u) + d^{\Phi}(v,w) > d^{\Phi}(u,w)$ im Widerspruch zur Annahme. (Diesen Fall 1 hätte man auch mit Bemerkung 4.1.4 aus Vorl.notizen Woche 4 behandeln können.)
Fall 2: wir nehmen an, dass Re $u = 0 =$ Re v, aber Re $w \neq 0$. Nach Lemma 4.3.10 in Notizen Woche 4 gibt es eine Isometrie der Form f_M von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$, die Re $f_M(u) = 0$ und Re $f_M(w) = 0$ erfüllt. Dabei ist

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

eine reelle Matrix mit $\det(M) = 1$, und $f_M(z)$ bedeutet $(az + b)/(cz + d)$. Nach dem, was wir in Fall 1 gezeigt haben (angewandt mit $f_M(u)$, $f_M(v)$ und $f_M(w)$ anstelle von u, v, w), ist dann auch Re $f_M(v) = 0$. Was bedeutet das für M ? Sei $u = ri$ und $v = si$. Dann ist

$$\text{Re }(f_M(u)) = \text{Re }((ari + b)/(cri + d)) = 0,$$

gleichwertig dazu: Re $((ari + b)(-cri + d)) = 0$, also $acr^2 + bd = 0$. Ebenso $acs^2 + bd = 0$, weil der Realteil von $f_M(v)$ gleich Null ist. Daraus folgt $ac(s^2 - r^2) = 0$, also $ac = 0$, und dann auch noch $bd = 0$. Also gilt entweder $a = d = 0$ und $b, c \neq 0$; oder $a, d \neq 0$ und $b = c = 0$. Man sieht dann schnell, dass Re $f_M(w) \neq 0$ wegen Re $w \neq 0$. Widerspruch zur Wahl von M.
Fall 3: wir nehmen an, dass Re $v = 0 =$ Re w, aber Re $u \neq 0$. Geht wie Fall 2. □

KOROLLAR 5.1.2. $\mathbb{H}$ *mit der Metrik* d^{Φ} *erfüllt das Axiom I.*

Beweis. Gegeben verschiedene $u, v \in \mathbb{H}$. Wir müssen zeigen, dass es genau eine Gerade L in $\mathbb{H}$ gibt, die u und v enthält. Dabei bedeutet *Gerade* immer noch: Bild einer abstandserhaltenden Abbildung von $\mathbb{R}$ mit Standardmetrik nach $\mathbb{H}$ mit Metrik d^Φ.
Wir wissen: es gibt eine Isometrie $\alpha: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ mit der Eigenschaft, dass $\operatorname{Re} \alpha(u) = 0 = \operatorname{Re} \alpha(v)$. Es ist uns erlaubt, u durch $\alpha(u)$ und v durch $\alpha(v)$ zu ersetzen.[1] Also haben wir auf den Fall reduziert, wo Realteil von u und v gleich Null sind. Sei nun $f: \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ eine abstandserhaltende Abbildung, deren Bild u und v enthält. Dann sagt uns das Lemma 5.1.1, dass $\operatorname{bild}(f)$ in der Menge

$$K := \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z = 0\}$$

enthalten ist.[2] Wir wissen schon, dass K eine Gerade ist, nämlich das Bild der abstandserhaltenden Abbildung g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{H}$ definiert durch $g(t) = \exp(t) \cdot i$. Also ist $g^{-1} \circ f$ sinnvoll (obwohl nicht ordnungsgemäss hingeschrieben), und es ist eine abstandserhaltende Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Solche kennen wir schon ganz gut. Sie sind bijektiv. Demnach ist $\operatorname{bild}(f) = \operatorname{bild}(g) = K$. Also ist K die einzige Gerade, die u und v enthält. □

5.2. Die hyperbolische Ebene erfüllt Axiom II

LEMMA 5.2.1. *Wenn drei Elemente* $u, v, w \in \mathbb{H}$ *die Gleichung*

$$d^\Phi(u, v) + d^\Phi(v, w) = d^\Phi(u, w)$$

erfüllen, und $\operatorname{Re} u \le \operatorname{Re} w$*, dann ist* $\operatorname{Re} u \le \operatorname{Re} v \le \operatorname{Re} w$.

Beweis. Versuchsweise sei angenommen $\operatorname{Re} v > \operatorname{Re} w$. Setze $v' = v - \varepsilon$ wobei

$$\varepsilon = (\operatorname{Re} v - \operatorname{Re} w)/2.$$

Dann ist $\operatorname{Im} v' = \operatorname{Im} v$. Wegen Pythagoras und unserer Formel für $\cosh(d^\Phi(\ldots))$ erhalten wir $d^\Phi(u, v') < d^\Phi(u, v)$ und $d^\Phi(v', w) < d^\Phi(v, w)$. Weil ausserdem

$$d^\Phi(u, v') + d^\Phi(v', w) \ge d^\Phi(u, w),$$

finden wir, dass $d^\Phi(u, v) + d^\Phi(v, w) > d^\Phi(u, w)$, Widerspruch. Daher $\operatorname{Re} v \le \operatorname{Re} w$. Ähnlich zeigt man $\operatorname{Re} u \le \operatorname{Re} v$. □

LEMMA 5.2.2. *Jede Gerade* L *in* $\mathbb{H}$ *hat die Form* $\alpha(K)$ *für eine Isometrie* $\alpha: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *und* $K = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z = 0\}$.

Beweis. Wähle zwei verschiedene Elemente $u, v \in L$. Wähle Isometrie $\beta: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ mit $\beta(u) \in K$ und $\beta(v) \in K$. (So ein β existiert nach Lemma 4.3.10.) Dann hat die Gerade $\beta(L)$ zwei verschiedene Elemente gemeinsam mit K, nämlich $\beta(u)$ und $\beta(v)$. Wegen Axiom I, das wir schon für $\mathbb{H}$ und d^Φ bewiesen haben, folgt dann $\beta(L) = K$. Also ist $K = \alpha(L)$ mit $\alpha = \beta^{-1}$. □

KOROLLAR 5.2.3. $\mathbb{H}$ *mit der Metrik* d^Φ *erfüllt das Axiom II.*

---

[1] Denn jede Gerade L, die u und v enthält, bestimmt eine Gerade $\alpha(L)$, die $\alpha(u)$ und $\alpha(v)$ enthält. Wenn $L = \operatorname{bild}(f)$ für eine abstandserhaltendes $f: \mathbb{R} \to \mathbb{H}$, dann $\alpha(L) = \operatorname{bild}(\alpha \circ f)$, wobei $\alpha \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ wieder abstandserhaltend ist. Und umgekehrt, jede Gerade L', die $\alpha(u)$ und $\alpha(v)$ enthält, bestimmt eine Gerade $\alpha^{-1}(L')$, die u und v enthält.

[2] Denn wenn $w \in \operatorname{bild}(f)$, dann erfüllen u, v und w zusammen die Gleichung aus dem Lemma, nach geeignetem Vertauschen der Namen u, v, w ... das hinterher wieder rückgängig gemacht werden kann. Also $w \in K$, weil das Lemma es sagt. Also $\operatorname{bild}(f) \subset K$.

Beweis. Das Axiom II handelt von Geraden L in einem metrischen Raum X und der Relation ρ_L auf der Teilmenge $X \setminus L$ von X. In unserer Situation, $X = \mathbb{H}$ usw., können wir mit Lemma 5.2.2 sofort auf den Fall reduzieren, wo

$$L = K := \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Re } z = 0\}.$$

Denn wenn L *irgendeine* Gerade in $\mathbb{H}$ ist, dann ist $L = \alpha(K)$ wie im Lemma. Wenn wir also Axiom II für $\mathbb{H}$ und die spezielle Gerade K verifizieren können, dann folgt es für $\mathbb{H}$ und die Gerade L durch Übersetzung mittels α und α^{-1}.
Jetzt betrachten wir also K und die Relation ρ_K auf $\mathbb{H} \setminus K$. Sie war so definiert: $(u,w) \in \rho_K$ genau dann, wenn das Segment $[u,w]$ leeren Schnitt mit K hat. Nach Lemma 5.2.1 haben wir $(u,w) \in \rho_K$, wenn $\text{Re } u < 0$ und $\text{Re } w < 0$. Denn alle Elemente v von $[u,w]$ erfüllen die Gleichung $d^\Phi(u,v) + d^\Phi(v,w) = d^\Phi(u,w)$, und daher gilt für sie $\text{Re } v < 0$, und daher $[u,w] \cap K = \varnothing$. Ebenso haben wir $(u,w) \in \rho_K$, wenn $\text{Re } u > 0$ und $\text{Re } w > 0$. Wenn dagegen $\text{Re } u < 0$ und $\text{Re } w > 0$, dann muss $[u,w] \cap K \neq \varnothing$ sein wegen Zwischenwertsatz. Denn $[u,w]$ ist das Bild einer stetigen Abbildung von einem Intervall nach $\mathbb{H}$, die wir zusammensetzen können mit der Abbildung $z \mapsto \text{Re } z$ von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{R}$. (Der Zwischenwertsatz wird auf diese Zusammensetzung losgelassen.) Damit haben wir ρ_K ganz gut verstanden: es ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{H} \setminus K$ mit genau zwei Äquivalenzklassen, bestehend aus den Elementen, die negativen bzw. positiven Realteil haben.
Es fehlt uns nur noch eine Isometrie $\beta\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, die die beiden Äquivalenzklassen vertauscht und jedes Element von K festlässt. Die ist aber leicht zu erraten: wir nehmen $\beta(z) = -\bar{z}$. Ein ganz unsportliches Argument dafür, dass β eine Isometrie ist: man sieht es aus der Formel für $\cosh(d^\Phi(...))$. □

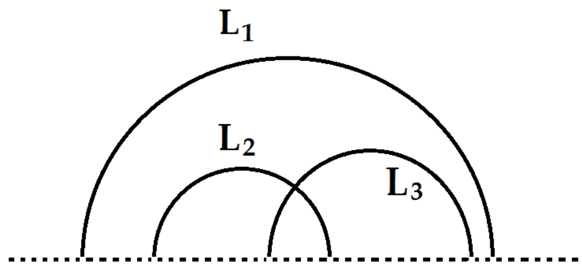
Wir sind vielleicht ein bisschen erstaunt darüber, dass die Isometrie β am Ende dieses Beweises *nicht* eine von denen ist, die wir in Bemerkung 4.2.7 und Theorem 4.2.8 (Vorlesungsnotizen Woche 4) kennengelernt haben. Das sollte irgendwann nochmal beleuchtet werden.

5.3. Die hyperbolische Ebene verletzt Axiom III

Den grössten Teil dieses Abschnitts habe ich in die Übungsaufgaben ausgelagert. Da soll gezeigt werden: Die Geraden in $\mathbb{H}$ (für die hyperbolische Metrik d^Φ) sind genau die Teilmengen

$$T \cap \mathbb{H}$$

von $\mathbb{H}$, wobei T entweder eine gewöhnliche *vertikale* Gerade in $\mathbb{C}$ ist oder ein gewöhnlicher Kreis (Radius > 0) mit Zentrum auf der reellen Achse.
Daraus folgt sehr leicht, dass die hyperbolische Ebene das Axiom III verletzt. Wir können zum Beispiel drei gewöhnliche Kreise T_1, T_2 und T_3 finden, alle mit Zentrum auf der reellen Achse, so dass $T_1 \cap T_2 = \varnothing$ und $T_1 \cap T_3 = \varnothing$, während $T_2 \cap T_3$ genau zwei Elemente hat (davon genau eins in $\mathbb{H}$). Sei $L_1 = T_1 \cap \mathbb{H}$, $L_2 = T_2 \cap \mathbb{H}$ und $L_3 = T_3 \cap \mathbb{H}$. Dann sind L_1, L_2 und L_3 Geraden in $\mathbb{H}$ für die Metrik d^Φ. Ausserdem ist $L_2 \cap L_1 = \varnothing$ und $L_3 \cap L_1 = \varnothing$, aber $L_2 \cap L_3$ hat genau ein Element; also gibt es mindestens zwei verschiedene Parallelen zu L_1, nämlich L_2 und L_3, die dieses Element enthalten.



5.4. Übungsaufgaben

AUFGABE 5.4.1. Sei G die Menge aller reellen 2×2-Matrizen M mit Determinante $\det(M) = \pm 1$, also $+1$ *oder* -1. Im Fall $\det(M) = 1$ haben wir schon gezeigt, dass die Formel

$$f_M(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{falls } M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

eine Isometrie f_M von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$ definiert (Thm 4.2.8). Im Fall $\det(M) = -1$ definieren wir jetzt noch

$$f_M(z) := \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \qquad \text{falls } M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Formel für f_M auch im Fall $\det(M) = -1$ eine Isometrie von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$ definiert.[3] [3]
(ii) Zeigen Sie, dass für alle $M, N \in G$ die Gleichung $f_M \circ f_N = f_{MN}$ gilt.[4]

AUFGABE 5.4.2. Zeigen Sie: Jede Gerade L im metrischen Raum $\mathbb{H}$ (mit der Metrik d^Φ wie in Def. 4.1.1) hat die Form $T \cap \mathbb{H}$, wobei T entweder ein (gewöhnlicher) Kreis in $\mathbb{C}$ ist mit Zentrum auf der reellen Achse, oder eine (gewöhnliche) vertikale Gerade.
Anleitung: Aus diesem Kapitel ist bekannt, dass $L = f_M(K)$ für eine Matrix $M \in G$ wie in Aufgabe 1, mit $\det(M) = +1$; dabei ist $K = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z = 0\}$. Das soll benutzt werden. *Methode 1*: Sie versuchen, es daraus direkt herzuleiten. Dann sollten Sie sich zuerst überlegen, wo das T die reelle Achse treffen könnte. *Methode 2*: Zeigen Sie, dass für M wie oben gilt:

$$z \in f_M(K) \Leftrightarrow \left(f_M \circ f_A \circ f_M^{-1}\right)(z) = z$$

wobei $f_A(z) = -\bar{z}$. (Wie sieht dann die Matrix A aus?) Mit Aufgabe 5.4.1 lässt sich der Ausdruck $f_M \circ f_A \circ f_M^{-1}$ vereinfachen.

[3] Man kann das leicht auf Thm 4.2.8 zurückführen.
[4] Wurde schon in Vorl.notizen erwähnt für den Fall $\det(M) = 1 = \det(N)$, aber ohne Beweis.

Aufgabe 5.4.3. Umkehrung von Aufgabe 5.4.2: Wenn T ein gewöhnlicher Kreis in $\mathbb{C}$ ist mit Zentrum auf der reellen Achse (Radius > 0) oder eine gewöhnliche vertikale Gerade, dann ist $\mathsf{T} \cap \mathbb{H}$ eine Gerade in $\mathbb{H}$ für d^{Φ}, die hyperbolische Metrik.[5]

[5] Dabei darf das Resultat von Aufgabe 2 benutzt werden, auch wenn die Aufgabe nicht gelöst worden ist. Ausserdem darf natürlich benutzt werden, dass die hyperbolische Ebene das Axiom I erfüllt. Noch ein Hinweis: denken Sie an Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Gegeben zwei verschiedene Elemente in $\mathbb{C}$; wie würden Sie einen Kreis konstruieren, der beide enthält und sein Zentrum auf der reellen Achse hat? Geht natürlich nicht immer, aber doch meistens. Warum frage ich das?

CHAPTER 6

Geometrische Konstruktionen und Abschätzungen

Streckenweise besteht dieses Kapitel nur aus ausführlichen Kommentare zu dem Buch von Iversen.

6.1. Strikte Dreiecksungleichung

I.1.7-I.1.9 im Buch.
Wir setzen voraus: metrischer Raum X mit Metrik d (manchmal d_X genannt), der das Axiom I erfüllt. Also: zu je zwei verschiedenen Elementen von X existiert genau eine Gerade in X, die die beiden enthält. *Gerade* in X bedeutet immer noch: bild(f) für ein abstandserhaltendes $f\colon \mathbb{R} \to X$.

PROPOSITION 6.1.1. *Wenn* A, B, C *Elemente von* X *sind, die nicht auf einer Geraden liegen, dann gilt die strikte Dreiecksungleichung*

$$d(A, C) < d(A, B) + d(B, C).$$

Beachten, dass $d(A, C) \le d(A, B) + d(B, C)$ schon klar ist, weil X metrischer Raum. *Idee des Beweises*: wir nehmen mal an

$$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$$

und konstruieren dann eine Gerade L, die A, B, C enthält. Dieser Konstruktion liegt folgende schlaue Beobachtung zugrunde. Sei $g\colon [u, v] \to X$ eine Abbildung, wobei $[u, v]$ Intervall in $\mathbb{R}$.

- Angenommen, es gibt $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k \in [u, v]$ so dass

  $$u = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = v$$

  und so dass g auf jedem Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ abstands-nicht-vergrössernd ist. Dann ist g insgesamt abstands-nicht-vergrössernd.
- Wenn ausserdem noch $d(g(u), g(v)) = v - u$ gilt, dann ist g abstandserhaltend.

(Das ist eine nette Übungsaufgabe.) Um jetzt die Gerade L zu konstruieren, wählen wir abstandserhaltende Abbildungen $\varphi, \lambda, \mu\colon \mathbb{R} \to X$ derart, dass bild(φ) die Gerade durch A und C ist, dass bild(λ) die Gerade durch A und B ist und dass bild(μ) die Gerade durch B und C ist. Es geht wegen Axiom I. Genauer können wir $a, b, c \in \mathbb{R}$ wählen, so dass $b - a = d(A, B)$, $c - b = d(B, C)$ und dann automatisch $c - a = d(A, C)$. Dann können wir ϕ, λ und μ so einrichten, dass $\phi(a) = A$ und $\phi(c) = C$; $\lambda(a) = A$ und $\lambda(b) = B$; $\mu(b) = B$ und $\mu(c) = C$. Aus diesen Angaben kochen wir dann eine einzige Abbildung

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to X.$$

Sie soll auf $[a, b]$ mit λ, auf $[b, c]$ mit μ und auf dem Rest von $\mathbb{R}$ mit φ übereinstimmen. Wenn wir jetzt $u < a$ und $v > c$ wählen, dann erfüllt γ eingeschränkt auf $[u, v]$ die Bedingungen in der schlauen Beobachtung und ist deswegen abstandserhaltend. Da u

und v fast beliebig waren (nur $u < a$ und $v > c$ war verlangt), ist γ abstandserhaltend. Wir setzen $L := \text{bild}(\gamma)$. □

KOROLLAR 6.1.2. *Für* $u, v \in X$ *kann das Segment* $[u, v] \subset X$ *neu definiert werden wie folgt:*

$$[u, v] = \{x \in X \mid d(u, x) + d(x, v) = d(u, v)\}.$$

Erklärung. Iversen nimmt diese Beschreibung als Definition von $[u, v]$. *Unsere* Definition im Fall $u \neq v$ ging so: wähle abstandserhaltende Abbildung $f: \mathbb{R} \to X$ mit $u, v \in \text{bild}(f)$. Setze $a = f^{-1}(u)$ und $b = f^{-1}(v)$. Dann ist $[u, v] := f([a, b])$ falls $a < b$, bzw. $[u, v] = f([b, a])$ falls $b < a$.
Ich bleibe bei diesen Bezeichnungen (und bei der alten Definition vom Segment) und nehme auch noch an $a < b$. Wenn jetzt $x \in [u, v]$, dann $x = f(c)$ für ein $c \in [a, b]$. Da f abstandserhaltend ist und $|c - a| + |b - c| = |b - a|$, folgt $d(u, x) + d(x, v) = d(u, v)$. Wenn x zur Geraden bild(f) gehört, aber nicht zum Segment $[u, v]$, dann ist $x = f(c)$ für ein c mit $c < a$ oder $c > b$. Da f abstandserhaltend ist und $|c - a| + |b - c| > |b - a|$ in diesem Fall, gilt $d(u, x) + d(x, v) > d(u, v)$ in diesem Fall. Wenn x nicht zur Geraden bild(f) gehört, dann haben wir nach Proposition 6.1.1 auch wieder: $d(u, x) + d(x, v) > d(u, v)$. Damit sind alle Fälle abgehakt. □

6.2. Lot fällen (senkrechte Projektion auf eine Gerade)

I.2.1 bis I.2.4 im Buch. Iversen benutzt Grossbuchstaben wie A, B, C, P, Q für Punkte in X (= Elemente von X) und Kleinbuchstaben wie $k, \ell, m, n, \ldots$ für Geraden in X. Für Isometrien (von X nach X) benutzt er gerne griechische Kleinbuchstaben. Ich versuche, mich daran zu halten. (Wahrscheinlich habe ich in den vorhergehenden Kapiteln dagegen verstossen.)

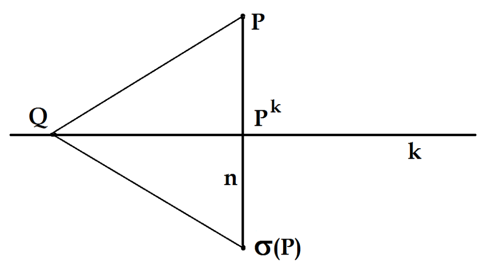
Voraussetzungen an den metrischen Raum X: er soll jetzt Axiom I und Axiom II erfüllen. Dabei bleiben wir wahrscheinlich für längere Zeit.

BEMERKUNG 6.2.1. Vorsicht: die Formulierung von Axiom II, die ich gegeben habe, ist etwas stärker als die, die Iversen gibt. (Ich habe sie aus der ersten Ausgabe von Iversens Buch.) Die stärkere/ältere Formulierung geht so: Für jede Gerade k in X zerfällt die Menge $X \smallsetminus k$ in genau zwei nichtleere Teile derart, dass $A, B \in X \smallsetminus L$ genau dann zum gleichen Teil gehören, wenn das Segment $[A, B]$ leeren Schnitt mit k hat. Die schwächere/neuere Formulierung geht so: Für jede Gerade k in X zerfällt die Menge $X \smallsetminus k$ in genau zwei nichtleere Teile derart, dass $A, B \in X \smallsetminus L$ genau dann zum gleichen Teil gehören, wenn sie durch eine stetige Kurve γ in $X \smallsetminus L$ verbunden werden können.
Iversen beweist allerdings, dass die scheinbar schwächere Version von Axiom II die scheinbar stärkere impliziert. Darauf will ich nicht weiter eingehen.
Vorsicht: die beiden Teile von $X \smallsetminus k$, die oben erwähnt sind, werden bei Iversen *sides of* k genannt und hier entsprechend *Seiten* von k. Das kann man leider falsch verstehen — man könnte zum Beispiel glauben, dass eine Seite von k eine Teilmenge von k ist, was aber absolut nicht richtig ist.

LEMMA 6.2.2. *Gegeben Gerade* $k \subset X$ *und Punkt* $P \in X$. *Unter den Elementen von* k *gibt es ein einziges, für das der Abstand zu* P *minimal ist. Bezeichnung dafür:* P^k.

Beweis. Fall $P \in k$ ist klar. Jetzt nehmen wir an $P \notin k$. Konstruktion: wähle Isometrie $\sigma: X \to X$, die $\sigma(Q) = Q$ erfüllt für alle $Q \in k$ und die die beiden *Seiten von*

k (Äquivalenzklassen der Relation ρ_k wie beschrieben[1] in Axiom II) miteinander vertauscht. Isometrie σ existiert wegen Axiom II. Sei n die Gerade durch P und $\sigma(P)$ und sei $[P, \sigma(P)] \subset n$ das Segment wie üblich. Weil P und $\sigma(P)$ auf verschiedenen Seiten von k, muss $[P, \sigma(P)]$ mindestens ein Element mit k gemeinsam haben; und sogar genau eins, weil sonst $n = k$ im Widerspruch zu $P \notin k$. Dieses Element nennen wir P^k.
Jetzt sei $Q \in k$, $Q \neq P^k$. Dann $Q \notin n$ weil sonst wieder $n = k$.



Deswegen (mit Proposition 6.1.1) ist

$$d(\sigma(P), Q) + d(Q, P) > d(\sigma(P), P).$$

Linke Seite dieser Ungleichung: $= 2d(P, Q)$ weil $Q = \sigma(Q)$ und $d(\sigma(P), Q) = d(\sigma(P), \sigma(Q)) = d(P, Q)$. Rechte Seite: $= 2d(P, P^k)$ wegen

$$d(\sigma(P), P) = d(\sigma(P), P^k) + d(P^k, P) = d(\sigma(P), \sigma(P^k)) + d(P^k, P).$$

Also $d(P, Q) > d(P, P^k)$. □

Der Beweis zeigt mehr. In der Konstruktion von P^k haben wir eine Wahl von Isometrie σ getroffen. Trotzdem hat sich P^k als eindeutig herausgestellt, weil es unter den Elementen von k durch minimalen Abstand von P charakterisiert ist. Ausserdem haben wir festgestellt $d(\sigma(P), P^k) = d(P, P^k)$. Jetzt können wir den Spiess umdrehen und sagen:

KOROLLAR 6.2.3. *Für jede Gerade* k *in* X *gibt es* genau eine *Isometrie* $\sigma: X \to X$*, die* $\sigma(Q) = Q$ *erfüllt für alle* $Q \in k$ *und die die* Seiten *von* k *miteinander vertauscht. Sie kann wie folgt beschrieben werden. Für* $P \notin k$ *bestimme erst das eindeutige* $P^k \in k$ *mit dem minimalen Abstand von* P*, dann die Gerade durch* P *und* P^k*; auf dieser Geraden ist* $\sigma(P)$ *der einzige Punkt* $\neq P$*, der denselben Abstand zu* P^k *hat wie* P.

Ausserdem haben wir im Beweis von Lemma 6.2.2 festgestellt:

$$d(\sigma(P), Q) = d(P, Q) > d(P, P^k) = d(\sigma(P), P^k)$$

für beliebige $Q \in k$ mit $Q \neq P^k$. Das heisst, der Punkt von k mit dem minimalen Abstand zu $\sigma(P)$ ist wieder P^k. Daraus folgt $\sigma(\sigma(P)) = P$. Da P ziemlich beliebig war, bedeutet das:

KOROLLAR 6.2.4. *Die Isometrie* σ *oben erfüllt* $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$. □

DEFINITION 6.2.5. Die einzige Isometrie $\sigma: X \to X$, die $\sigma(Q) = Q$ erfüllt für alle $Q \in k$ und die die Seiten von k miteinander vertauscht, dürfen wir jetzt mit gutem Gewissen die *Spiegelung an der Geraden* k nennen. Die Abbildung $P \mapsto P^k$ von X nach k heisst *Projektion auf* k oder vielleicht *senkrechte Projektion auf* k.

[1] Tut mir leid, dass ich einen griechischen Kleinbuchstaben für die Relation gewählt habe ... denn nach Iversen sollten diese ja für Isometrien reserviert sein.

Für $P \notin k$ kann die Gerade n durch P und P^k das *Lot* von P auf k genannt werden. Dafür hat Iversen anscheinend kein englisches Wort und mir fällt auch keines ein (ausser: the *perpendicular* to k through P). Er schreibt wahrscheinlich n, weil er an *Normale* denkt; *normal* wird oft als Synonym für *senkrecht* benutzt.

Bemerkung 6.2.6. Sei k Gerade in X. Es gibt genau zwei Isometrien $\tau: X \to X$, die $\tau(Q) = Q$ erfüllen für alle $Q \in k$. Eine ist die Spiegelung an k, die andere ist die Identität. (Dem Beweis bei Iversen habe ich nichts hinzuzufügen.)

6.3. Die Relation *senkrecht* und rechte Winkel

I.2.5 bis I.2.7 im Buch.

Definition 6.3.1. Gegeben verschiedene Geraden k und n in X. Wir schreiben $n \perp k$ und sagen n *ist senkrecht zu* k, wenn $\sigma_k(n) = n$, wobei σ_k die Spiegelung an der Geraden k ist.

Bemerkung: wenn k und n parallel sind, $n \cap k = \varnothing$, dann ist $n \cap \sigma_k(n) = \varnothing$, also gilt nicht $n \perp k$. Denn dann ist offenbar n in einer Seite von k enthalten und $\sigma_k(n)$ ist demnach in der anderen Seite von k enthalten.

Lemma 6.3.2. *Für verschiedene Geraden* k *und* n *in* X *ist* $n \perp k$ *genau dann, wenn* $\sigma_k \circ \sigma_n = \sigma_n \circ \sigma_k$.

Beweis wie bei Iversen: wir bemerken, dass $\sigma_k \circ \sigma_n \circ (\sigma_k)^{-1}$ dasselbe ist wie Spiegelung an der Geraden $\sigma_k(n)$. Also ist $\sigma_k \circ \sigma_n \circ (\sigma_k)^{-1} = \sigma_n$ gleichwertig zu: Spiegelung an $\sigma_k(n)$ ist Spiegelung an n, und das ist gleichwertig zu: $\sigma_k(n) = n$. □

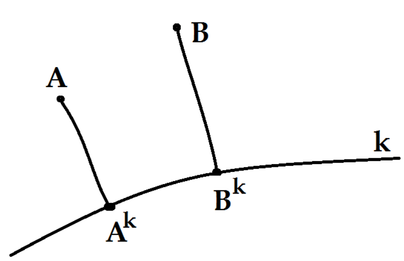
Korollar 6.3.3. $n \perp k$ *genau dann, wenn* $k \perp n$. □

Wenn $n \perp k$, dann haben n und k genau einen Punkt P gemeinsam, und wir sagen etwas formlos, dass n und k bei P einen *rechten Winkel* machen. Das ist formlos, weil wir bis jetzt noch keinen allgemeineren Begriff von *Winkel* haben (wenn zwei verschiedene Geraden sich an einem Punkt treffen). Wir sind aber dabei, uns in dieser Richtung vorzuarbeiten.

6.4. Saccheris Ungleichung

Diese wichtige Ungleichung besagt, dass die Projektion auf eine Gerade k in X Abstände nicht vergrössert. Also:

Theorem 6.3.4. $d(A^k, B^k) \leq d(A, B)$ *für alle* $A, B \in X$.

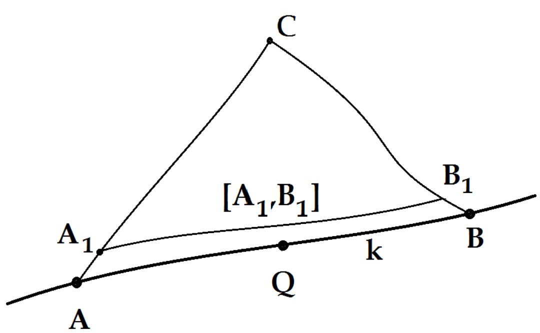


Der Beweis bei Iversen ist prima. Das Bild dazu bei Iversen könnte einen dazu verleiten, zu glauben, dass der Beweis nur funktioniert, wenn A und B auf der selben Seite von k liegen. Das ist aber nicht so. Wenn sie auf verschiedenen Seiten von k liegen, oder wenn einer von A und B zu k gehört, dann muss man ein etwas anderes Bild malen (zackiger). $\square$

Geschichtliche Bemerkung: Giovanni Gerolamo Saccheri (1667-1733) hat in einer Abhandlung (1733 erschienen) wichtige Konsequenzen aus der Negation des Parallelenaxioms (für uns Axiom III) gezogen, unter Beibehaltung der weniger umstrittenen Axiome (für uns Axiom I und II und die Bedingungen aus der Definition von *metrischer Raum*). Er hoffte zweifellos, einen Widerspruch zu finden und auf diese Weise das Parallelenaxiom aus den anderen abzuleiten. Er fand eigentlich keinen Widerspruch, aber er fand allerhand Konsequenzen, die er hinreichend absurd fand, um die Angelegenheit damit abzutun. Er glaubte also nicht an die nicht-Euklidische Geometrie, hat aber trotzdem Wichtiges für ihre Grundlegung geleistet.

6.4. Konstruktion von Senkrechten

I.2.9. im Buch. Gegeben Gerade k in X und $Q \in k$. Gesucht: Gerade n senkrecht zu k, derart dass $n \cap k = \{Q\}$. Dazu genügt es, $P \in X \smallsetminus k$ zu finden mit $P^k = Q$, denn dann nehmen wir für n die Gerade durch P und $Q = P^k$. Aber es ist überraschend schwierig, so ein P zu konstruieren. Iversen benutzt dazu den Zwischenwertsatz. Mir fällt auch nichts Besseres ein.
Skizze der Konstruktion, so wie ich sie verstehe. Gegeben also Gerade k in X und $Q \in k$. Wir schreiben $k = \text{bild}(f)$ wobei $f\colon \mathbb{R} \to X$ abstandserhaltend. Wir können annehmen $f(0) = Q$. Sei $A = f(-1)$ und $B = f(1)$. Es existiert $C \in X$ mit $C \notin k$; wir wählen so eins. Aus dem Segment $[A, C]$ wählen wir Element A_1 mit $0 < d(A_1, A) < 1/2$. Aus dem Segment $[B, C]$ wählen wir B_1 mit $0 < d(B, B_1) < 1/2$. Dann gehören A_1 und B_1 zur selben Seite von k, nämlich zu der Seite, zu der auch C gehört. Also $[A_1, B_1] \cap k = \varnothing$.



Sei $h\colon X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(P) = f^{-1}(P^k)$; also Projektion auf die Gerade k gefolgt von f^{-1}. Wegen Saccheri ist h abstands-nicht-vergrössernd und damit stetig. Insbesondere gilt

$$d(A_1^k, A) \le d(A_1, A) < 1/2$$

und daher $h(A_1) < -1/2$. Ebenso $h(A_2) > +1/2$. Wegen Zwischenwertsatz existiert also $P \in [A_1, B_1]$ mit $h(P) = 0$. Das bedeutet $f^{-1}(P^k) = 0$, also $P^k = f(0) = Q$. Beachten, dass $P \notin k$ weil $P \in [A_1, B_1]$. $\square$

6.5. Spiegelung an einem Punkt

I.3.1 im Buch; I.3.2 und I.3.3. fallen weg oder werden trivial, weil wir die stärkere Form von Axiom II zugrundelegen.

Gegeben Geraden n und k in X mit $n \perp k$. Sei P das einzige Element von $n \cap k$. Sei σ_k die Spiegelung an k und σ_n die Spiegelung an n.

THEOREM 6.5.1. *Die Isometrie* $\tau_P := \sigma_k \circ \sigma_n$ *hängt nur von* P *ab, weiter nicht von der Wahl von* n *und* k*. Sie kann wie folgt beschrieben werden:* $\tau_P(P) = P$*, und für* $Q \in X$ *mit* $Q \neq P$ *ist* $\tau_P(Q)$ *der einzige Punkt* $\neq Q$ *auf der Geraden durch* Q *und* P*, der denselben Abstand zu* P *hat wie* Q*.*

Dazu beweisen wir erst:

LEMMA 6.5.2. *Wenn* $Q \in X \smallsetminus n$*, dann ist* $\sigma_k(Q)$ *auf derselben Seite von* n *wie* Q*.*

Beweis. Weil $\sigma_k(n) = n$ nach Definition von $\perp$, und weil σ_k bijektiv ist, folgt aus $Q \notin n$, dass auch $\sigma_k(Q) \notin n$. Wir wissen schon, dass jede Seite von n Elemente von k enthält. Demnach gibt es $A \in k \smallsetminus n$, das zur selben Seite von n gehört wie Q. Dann gehört $\sigma_k(A) = A$ zur selben Seite von $\sigma_k(n) = n$ wie $\sigma_k(Q)$. Also gehört Q zur selben Seite von n wie $\sigma_k(Q)$. □

Beweis von Thm 6.5.1. Wir zeigen erst, dass $\tau_P(Q) = Q$ dann und nur dann, wenn $Q = P$. *Erster Fall*: $Q = P$. Es ist klar, dass $\tau_P(P) = P$. *Zweiter Fall*: $Q \in n$. Dann ist $\tau_P(Q) = \sigma_k(Q)$, und das ist nur dann gleich Q, wenn $Q \in k$, also $Q \in k \cap n$, also $Q = P$. *Dritter Fall*: $Q \in k$. Weil wir $\tau_P = \sigma_k \circ \sigma_n = \sigma_n \circ \sigma_k$ schreiben dürfen (Lemma 6.3.2), erhalten wir genauso wie im zweiten Fall: $\tau_P(Q) = Q$ nur dann, wenn $Q = P$. *Vierter Fall*: $Q \in X \smallsetminus (n \cup k)$. Der Punkt $\sigma_k(Q)$ liegt auf derselben Seite von n wie Q, wie eben bewiesen. Dagegen liegt $\sigma_n(Q)$ nicht auf derselben Seite von n wie Q. Also ist $\sigma_k(Q) \neq \sigma_n(Q)$. Daraus folgt $Q \neq \tau_P(Q)$ durch beidseitiges Anwenden von σ_k. Fertig.
Als nächstes bemerken wir, dass $\tau_P \circ \tau_P = \mathrm{id}$. Das folgt leicht aus $\sigma_k \circ \sigma_n = \sigma_n \circ \sigma_k$, denn $\tau_P \circ \tau_P = \sigma_k \circ \sigma_n \circ \sigma_n \circ \sigma_k = \sigma_k \circ \sigma_k = \mathrm{id}$.
Wenn Q ein Punkt von X ist, $Q \neq P$, dann muss also τ_P die beiden (verschiedenen) Punkte Q und $\tau_P(Q)$ miteinander vertauschen. Demnach muss τ_P den Mittelpunkt vom Segment $[Q, \tau_P(Q)]$ festhalten. Da aber τ_P nur einen Punkt festhält, nämlich P, muss der Mittelpunkt von $[Q, \tau_P(Q)]$ gleich P sein. Damit haben wir die gewünschte Beschreibung von $\tau_P(Q)$. □

Iversen nennt τ_P einen *half-turn*, nicht *reflection at a point*, wie man erwarten könnte. Er benutzt das Wort *reflection* eher nur für Spiegelungen an Geraden. Ich schlage trotzdem vor, dass wir dafür *Spiegelung am Punkt* P sagen. (Ich schlage nicht vor, dass wir die Buchstaben σ und τ nur für Spiegelungen an Geraden bzw. Punkten reservieren. Dazu ist unser Vorrat an griechischen Kleinbuchstaben zu gering.)

6.6. Mittelsenkrechte

I.3.4 bis I.3.6 im Buch.

PROPOSITION 6.6.1. *Gegeben verschiedene Elemente* A, B *in* X *und eine Gerade* n*, die senkrecht* ($\perp$) *zur Geraden* k *durch* A *und* B *ist und die* k *am Mittelpunkt von* $[A, B]$ *trifft. Dann ist*

$$n = \{C \in X \mid d(A, C) = d(B, C)\}.$$

Der Beweis bei Iversen ist prima. □

KOROLLAR 6.6.2. *Gegeben verschiedene Elemente* A, B *in* X. *Es gibt genau eine Gerade* n, *die senkrecht zur Geraden* k *durch* A *und* B *ist und die* k *am Mittelpunkt von* $[A, B]$ *trifft.* Sie heisst: Mittelsenkrechte usw. □

KOROLLAR 6.6.3. *Gegeben Gerade* k *in* X *und Element* Q *von* X. *Dann gibt es genau eine Gerade* n *in* X *mit* $Q \in n$ *und* $n \perp k$.

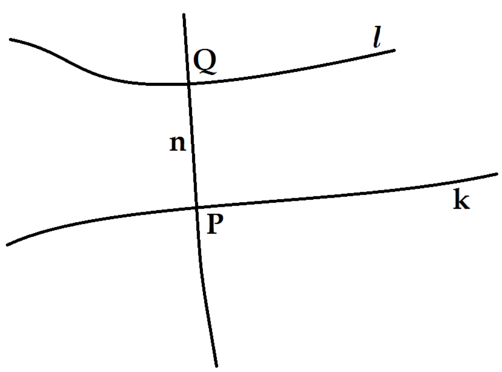
Beweis. Falls $Q \notin k$: da $n \perp k$ sein soll und $Q \in n$, muss gelten $\sigma_k(Q) \in n$ (wobei σ_k die Spiegelung an k ist). Daher auch $Q^k \in n$, also ist n die Gerade durch Q und Q^k. Damit ist sie eindeutig und existent. Falls $Q \in k$: Existenz folgt aus Abschnitt 6.5. Für Eindeutigkeit: wähle $A, B \in k$ derart, dass Q der Mittelpunkt von $[A, B]$ ist, $A \neq B$. Wende Proposition 6.6.1 an. □

6.7. Existenz von Parallelen

Hier geht es um etwas, was ich in der ersten Ausgabe von Iversen gesehen habe, was aber in der zweiten Ausgabe nicht mehr so leicht zu finden ist.

LEMMA 6.7.1. *Zwei Geraden* k *und* ℓ *in* X, *die eine gemeinsame Senkrechte* n *haben, sind parallel.*

Beweis. Wenn k und ℓ die Gerade n im selben Punkt P treffen, dann folgt aus Korollar 6.6.3, dass $k = \ell$, und damit auch k parallel zu ℓ. Jetzt nehmen wir an, dass n von k in einem Punkt P getroffen wird und dass n von ℓ in einem Punkt Q getroffen wird, wobei $P \neq Q$.



Angenommen, es gibt $S \in k \cap \ell$. Dann ist $S \notin n$. (Denn sonst $k \cap n \cap \ell \neq \varnothing$, was wir ausdrücklich ausgeschlossen haben.) Aus $S \notin n$ folgt $\sigma_n(S) \neq S$, wobei σ_n die Spiegelung an der Geraden n ist. Aber $\sigma_n(S) \in \sigma_n(k) \cap \sigma_n(\ell) = k \cap \ell$. Also hat $k \cap \ell$ mindestens zwei verschiedene Elemente, S und $\sigma_n(S)$. Wegen Axiom I ist dann $\ell = k$, also auch $\ell \cap n = k \cap n$, also $P = Q$ im Widerspruch zu unserer Annahme. □

Noch ein Beweis. Wenn k und ℓ die Gerade n im selben Punkt P treffen, dann folgt aus Korollar 6.6.3, dass $k = \ell$, und damit auch k parallel zu ℓ. Jetzt nehmen wir an, dass n von k in einem Punkt P getroffen wird und dass n von ℓ in einem Punkt Q getroffen wird, wobei $P \neq Q$.
Sei $A \in k$ und $B \in \ell$. Dann ist $A^n = P$ und $B^n = Q$. Nach der Ungleichung von Saccheri ist $d(A, B) \geq d(A^n, B^n) = d(P, Q) > 0$. Also $A \neq B$. Da $A \in k$ und $B \in \ell$ beliebig waren, folgt $k \cap \ell = \varnothing$. □

KOROLLAR 6.7.2. *Sei* k *eine Gerade in* X *und* $Q \in X \setminus k$. *Dann existiert eine Gerade* ℓ *in* X *mit* $Q \in \ell$ *und* $k \cap \ell = \varnothing$, *das heisst,* k *parallel zu* ℓ.

Das ist bemerkenswert, denn wir setzen hier nur Axiom I und Axiom II voraus. Der Existenzteil von Axiom III folgt also schon aus Axiomen I und II (wie ich schon vor einiger Zeit erwähnt habe).

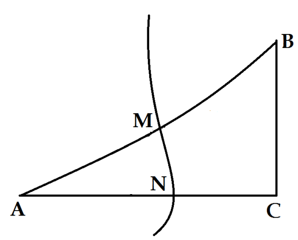
Beweis. Sei n die Gerade durch Q, die k senkrecht trifft. Sei ℓ die Gerade durch Q, die n senkrecht trifft. Dann ist $\ell \neq k$, weil $Q \in \ell$. Ausserdem haben k und ℓ eine gemeinsame Senkrechte n. Also sind sie parallel wegen Lemma 6.7.1. □

6.8. Ein paar Ungleichungen für Abstände

I.3.7 bis I.3.8. im Buch.
Dazu ein paar neue Vokabeln: Unter einem *Dreieck* in X verstehen wir eine Auswahl von drei Elementen A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen und deshalb verschieden sind. Eigentlich könnte man ganz gut $\{A, B, C\}$ dafür schreiben, aber bei Iversen wird ΔABC geschrieben. So ein Dreieck ΔABC bestimmt drei verschiedene Geraden: die durch A und B, die durch B und C und die durch A und C. Das Dreieck wird *rechtwinklig* genannt, wenn zwei von diesen Geraden senkrecht zueinander sind; siehe Definition von *senkrecht* in Abschnitt 6.3. Genauere Angaben sind erwünscht/erforderlich, zum Beispiel rechter Winkel bei C.

LEMMA 6.8.1. *Sei* ΔABC *ein rechtwinkliges Dreieck in* X *mit rechtem Winkel bei* C. *Wir schreiben* b *für die Gerade durch* A *und* C, *usw. Sei* M *der Mittelpunkt von* $[A, B]$. *Sei* $N = M^b$ *die Projektion von* M *auf die Gerade* b. *Dann gilt*

$$d(M, N) \leq d(B, C)/2,$$
$$d(A, N) \geq d(A, C)/2.$$



Beweis. Der Beweis bei Iversen ist Klasse: unerwartete Anwendung von Punktspiegelung kombiniert mit Saccheris Ungleichung. In dem Bild dazu (oben nur teilweise reproduziert) wird so getan, als ob der Punkt $N = M^b$ zum Segment $[A, C]$ gehören muss. (Wird das auch benutzt? Ich denke schon, denn ganz am Ende des Beweises wird $d(A, N) + d(N, C) = d(A, C)$ benutzt, obwohl es nicht hingeschrieben wird.) Natürlich muss $N = M^b$ zur Geraden b durch A und C gehören, aber das bedeutet ja nicht automatisch $N \in [A, C]$. Also, mein Gefühl war, das muss bewiesen werden. Ich bin der Sache nachgegangen und kann dazu folgendes Lemma anbieten.

LEMMA 6.8.2. *Sei* k *eine Gerade in* X *und* $[A, B]$ *ein Segment in* X, *wobei* $A \neq B$. *Sei* $f\colon [A, B] \to k$ *die Einschränkung der Projektion auf* k. *Dann ist* f *entweder konstant, oder* f *ist stetig und injektiv mit* $\operatorname{bild}(f) = [A^k, B^k]$.

Beweis. Angenommen C, D sind verschiedene Elemente von $[A, B]$ und $f(C) = f(D)$, das heisst, $C^k = D^k$. Dann gehören C und D beide zu der eindeutigen Geraden n, die senkrecht zu k ist und durch $C^k = D^k \in k$ geht. Sie gehören aber auch zu der Geraden durch A und B. Also ist n die Gerade durch A und B. Also ist $[A, B]$ Teilmenge der Geraden n, die $\perp k$ ist. Bei der Projektion auf k wird diese ganze Gerade n auf einen einzigen Punkt abgebildet; also ist auch f konstant.
Anders ausgedrückt, wenn f nicht konstant ist, dann ist es injektiv. Ausserdem ist f stetig. Das folgt sofort aus Saccheris Ungleichung, denn sie sagt $d(f(C), f(D)) = d(C^k, D^k) \leq d(C, D)$ für beliebige C, D aus X und speziell aus $[A, B]$. Eine stetige injektive Abbildung von einem Segment $[A, B]$ in eine Gerade k ist wachsend oder fallend. (Diese Aussage wird allerdings erst sinnvoll, wenn wir eine Isometrie von einem Intervall in $\mathbb{R}$ mit dem Segment $[A, B]$ wählen und eine Isometrie von k mit $\mathbb{R}$.) Daraus folgt, dass $\text{bild}(f) = [A^k, B^k]$. $\square$

Zurück zum Thema Ungleichungen für Abstände.

Proposition 6.8.3. *Gegeben zwei verschiedene Geraden h und k in X, die sich in einem Punkt treffen. Sei $g: \mathbb{R} \to X$ eine abstandserhaltende Abbildung mit* $\text{bild}(g) = h$ *und* $g(0) =$ *Schnittpunkt von h und k. Dann ist*

$$\lim_{t \to +\infty} d(g(t), g(t)^k) = +\infty \ ,$$

wobei $g(t)^k$ die senkrechte Projektion von $g(t) \in h$ auf die Gerade k bezeichnet. Genauer: die Abbildung $t \mapsto d(g(t), g(t)^k)$ von $[0, \infty[$ nach $[0, \infty[$ ist eine monoton wachsende Bijektion.

Iversen formuliert das etwas anders und benutzt dazu den Begriff *Orientierung einer Geraden* in X. Das wird bei ihm weiter nicht erklärt und ist vielleicht auch "intuitiv klar".

Definition 6.8.4. Eine Orientierung einer Geraden k in X ist eine Regel w, die jeder abstandserhaltenden Abbildung $f: \mathbb{R} \to X$ mit $\text{bild}(f) = k$ ein Element $w(f) \in \{+1, -1\}$ zuordnet und dabei folgende Eigenschaft hat:

- für zwei beliebige abstandserhaltende Abbildungen $f, g: \mathbb{R} \to X$ mit $\text{bild}(f) = k = \text{bild}(g)$ ist $w(f) = w(g)$ genau dann, wenn die Isometrie $g^{-1} \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Translation ist (also die Form $x \mapsto x + b$ hat für festes $b \in \mathbb{R}$).

Beispiel 6.8.5. Sei $f: \mathbb{R} \to X$ irgendeine abstandserhaltende Abbildung und $k := \text{bild}(f)$. Es gibt dann genau eine Orientierung w von k, bei der $w(f) = +1$ ist. Denn wir bestimmen: für abstandserhaltendes $g: \mathbb{R} \to X$ mit $\text{bild}(g) = k = \text{bild}(f)$ ist $w(g) = +1$ falls $g^{-1} \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Form $x \mapsto x + b$ hat und $w(g) = -1$ falls $g^{-1} \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Form $x \mapsto -x + b$ hat. Andere Möglichkeiten gibt es nicht, denn jede Isometrie von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ hat eine der Formen $x \mapsto x + b$, $x \mapsto -x + b$.

Iversen schreibt die Ungleichung in Proposition 6.8.3 dann so:

$$\lim_{P \to +\infty} d(P, P^k) = +\infty$$

wobei $P \in h$ gesagt wird und vorausgesetzt wird, dass die Gerade h orientiert ist. Das heisst, er verzichtet darauf, ein abstandserhaltendes $g: \mathbb{R} \to X$ zu wählen mit $\text{bild}(g) = h$, weil weniger genug ist.

Beweis von Proposition 6.8.3: kann bei Iversen nachgelesen werden. Iversen schreibt O für den Schnittpunkt von h und k.

6.9. Übungsaufgaben

AUFGABE 6.9.1. Sei X ein metrischer Raum, der das Axiom I erfüllt. Zeigen Sie: Die Elemente der Geraden durch zwei verschiedene Elemente P, Q von X sind genau diejenigen $A \in X$, für die $d(P,A) + d(A,Q) = d(P,Q)$ oder $d(A,P) + d(P,Q) = d(A,Q)$ oder $d(P,Q) + d(Q,A) = d(P,A)$ gilt.[2]

AUFGABE 6.9.2. Sei k eine Gerade in der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$; dazu Abschnitt 5.3 lesen. Weil $\mathbb{H}$ die Axiome I und II erfüllt, gibt es genau eine Isometrie $\sigma_k : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, die nicht die Identität ist, aber trotzdem alle Punkte von k festlässt. (Sie heisst *Spiegelung an der Geraden* k.) Zeigen Sie, dass σ_k die Form f_M hat für eine Matrix M (wie in Aufgabe 5.4.1; also $M \in G$).

AUFGABE 6.9.3. Zwei Geraden k und ℓ in der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$ sind gegeben durch

$$k = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z = 0\}, \qquad \ell = \{z \in H \mid \operatorname{Re} z = 1\}.$$

(Dazu Abschnitt 5.3.)

- Zeigen Sie: wenn eine Gerade n in $\mathbb{H}$ (im Sinn der hyperbolischen Metrik) senkrecht zu k ist, Abschnitt 6.3, dann ist sie ein Halbkreis (im Sinn der Euklidischen Metrik), und dessen Tangente am Schnittpunkt von n und k ist horizontal. Ebenso: wenn eine Gerade n in $\mathbb{H}$ (im hyperbolischen Sinn) senkrecht zu ℓ ist, dann ist sie ein Halbkreis (im Euklidischen Sinn), und dessen Tangente am Schnittpunkt von n und ℓ ist horizontal.
- Schliessen Sie daraus (ganz im Sinn der hyperbolischen Metrik): Obwohl k und ℓ parallel zueinander sind, gibt es keine Gerade n in $\mathbb{H}$, die sowohl k als auch ℓ senkrecht trifft.

AUFGABE 6.9.4. *Zur Saccheri-Ungleichung*: Sei k die Menge aller $z \in \mathbb{H}$ mit $\operatorname{Re} z = 0$; das ist bekanntlich eine Gerade in der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$. Sei $A = (1+i)/\sqrt{2}$ und $B = \sqrt{2}(1+i)$.

- Bestimmen Sie $A^k \in k$ und $B^k \in k$. (Siehe Abschnitt 6.2.)
- Zeigen Sie, dass $d(A, A^k) = d(B, B^k)$.
- Zeigen Sie, dass $d(A,B) > d(A^k, B^k)$ (strikte Ungleichung).

Skizze dazu.

[2] Keine Romane. 5 Zeilen sollten genügen.

CHAPTER 7

Für den Überblick: Gruppen und Wirkungen

7.1. Gruppen

Aus verschiedenen Gründen wird hier die Arbeit mit den Axiomen (wie im Buch von Iversen) unterbrochen. Wir bemühen uns stattdessen um Überblick, Strategie undsoweiter. Geometrie bei Euklid und erst recht bei Iversen ist die Lehre von den metrischen Räumen kombiniert mit Symmetriebedingungen. Die Symmetrie ist besonders in Axiom II ausgedrückt, wo die Existenz von gewissen Isometrien gefordert wird. Wir haben gerade in den letzten Tagen gesehen, dass das starke Auswirkungen hat. In dieser Unterbrechung geht es um die mathematische Theorie von Symmetrie an sich, also ohne ausdrücklichen Bezug zu metrischen Räumen. Diese Theorie heisst *Gruppentheorie*.
Ausser den Hauptbegriffen *Gruppe* und *Homomorphismus von Gruppen* dieser Theorie ist uns auch noch der Begriff *Wirkung* (einer Gruppe auf einer Menge) wichtig.

Definition 7.1.1. Eine *Gruppe* ist eine Menge G mit einem ausgezeichneten Element $1 \in G$ und einer Abbildung $\mu\colon G \times G \to G$ (manchmal *Multiplikation* genannt), die folgende Eigenschaften hat.

- *Neutrales Element*: Für jedes $x \in G$ ist $\mu(1, x) = x = \mu(x, 1)$.
- *Existenz von Inversen*: Für jedes $x \in G$ existiert $y \in G$ mit der Eigenschaft $\mu(x, y) = 1 = \mu(y, x)$.
- *Assoziativität*: Für alle $x, y, z \in G$ gilt $\mu(x, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), z)$.

Man sagt oft: die Gruppe G usw., wenn man eigentlich sagen sollte: die Gruppe bestehend aus der Menge G und dem ausgezeichneten Element $1 \in G$ und der Abbildung μ ...

Es ist üblich, statt $\mu(x, y)$ so etwas wie $x \cdot y$ oder noch kürzer xy zu schreiben. Dann sehen die Bedingungen oben so aus:

- *Neutrales Element*: Für alle $x \in G$ ist $1x = x = x1$.
- *Existenz von Inversen*: Für jedes $x \in G$ existiert $y \in G$ mit der Eigenschaft $xy = 1 = yx$.
- *Assoziativität*: Für alle $x, y, z \in G$ gilt $(xy)z = x(yz)$.

Wegen der Assoziativitätsbedingung braucht man sich um das Setzen von Klammern nicht zu kümmern: man kann zum Beispiel $uvwxyz$ schreiben und damit $(uv)(((wx)y)z)$ oder $(u(vw))((xy)z)$ meinen — es ist jedenfalls dasselbe. ABER: es wurde nicht gefordert, dass xy immer dasselbe ist wie yx. Diese zusätzlich Bedingung heisst *Kommutativität*. Wenn sie erfüllt ist, dann sprechen wir von einer *kommutativen Gruppe* oder von einer *abelschen Gruppe*. Bei einer kommutativen Gruppe benutzt man gelegentlich additive Schreibweise, also $x + y$ statt xy und 0 statt 1 für das ausgezeichnete neutrale Element. (Die erste Bedingung lautet dann zum Beispiel: $0 + x = x = x + 0$.)

Beispiel 7.1.2. (i) Sei S irgendeine Menge. Sei Σ_S die Menge aller bijektiven Abbildungen von S nach S. Dann wird Σ_S zu einer Gruppe durch folgende Definitionen: Als

ausgezeichnetes (neutrales) Element nehmen wir $\mathrm{id}: S \to S$. Für $\mu: \Sigma_S \to \Sigma_S$ wählen wir *die Zusammensetzung* von bijektiven Abbildungen. Das heisst, für bijektive Abbildungen $f: S \to S$ und $g: S \to S$ ist $\mu(f, g) := f \circ g$. Das ist natürlich dann wieder eine bijektive Abbildung von S nach S, und als solche ein Element von Σ_S.
Diese Gruppe Σ_S heisst *die symmetrische Gruppe* auf der Menge S. Wenn $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, dann schreibt man auch gerne Σ_n statt $\Sigma_{\{1,2,\ldots,n\}}$. Die Anzahl der Elemente von Σ_n ist $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Beispiel 7.1.3. Die Menge G der reellen 5×5-Matrizen mit Determinante $\neq 0$ bildet eine Gruppe in der folgenden Weise. Als ausgezeichnetes (neutrales) Element wählen wir I_5, die Identitätsmatrix. Die Abbildung μ definieren wir so, dass $\mu(A, B)$ gleich dem Matrixprodukt AB ist, wenn $A, B \in G$. Es ist bekannt, dass die drei Bedingungen erfüllt sind.

Beispiel 7.1.4. Sei diesmal G die Menge der 5×5-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen und Determinante $\neq 0$. Wir versuchen, daraus eine Gruppe zu machen. Als ausgezeichnetes (neutrales) Element wählen wir wieder I_5, die Identitätsmatrix. Die Abbildung μ definieren wir wieder so, dass $\mu(A, B)$ gleich dem Matrizprodukt AB ist, wenn $A, B \in G$. Es ist leider keine Gruppe. Denn die zweite Bedingung (Existenz von Inversen) ist verletzt.

Bemerkung 7.1.5. In einer Gruppe G gibt es zu jedem $x \in G$ genau ein $y \in G$ derart, dass $yx = 1$ ist. Ebenso gibt es zu jedem $x \in G$ genau ein $y \in G$ derart, dass $xy = 1$ ist. Demnach gibt es zu jedem $x \in G$ genau ein $y \in G$ derart, dass $yx = 1 = xy$ ist. (Man schreibt gerne $y = x^{-1}$ für dieses Element.) *Beweis der ersten Behauptung.* Gegeben $y_1, y_2 \in G$ mit $y_1 x = 1 = y_2 x$. Wähle $y_3 \in G$ mit $xy_3 = 1$. Dann ist

$$y_1 = y_1(xy_3) = (y_1 x)y_3 = (y_2 x)y_3 = y_2(xy_3) = y_2.$$

Definition 7.1.6. Sei G eine Gruppe mit neutralem Element 1 und Multiplikation μ von $G \times G$ nach G. Eine Teilmenge H von G heisst *Untergruppe* von G, wenn folgendes gilt.

- $1 \in H$.
- Wenn $x \in H$ und $y \in H$, dann auch $\mu(x, y) \in H$.
- Wenn $x \in H$ und $y \in G$ mit $\mu(x, y) = 1 = \mu(y, x)$, dann $y \in H$.

Bemerkung 7.1.7. Eine Untergruppe H von G heisst vor allem deshalb Untergruppe, weil sie zu einer Gruppe wird, wenn wir die Multiplikation in H durch Einschränkung der Multiplikation in G definieren. Das heisst, für $x, y \in H$ definieren wir $xy = \mu(x, y)$ wie in G, wobei wir sicher sein dürfen, dass wir auf diese Weise wieder ein Element von H erhalten.

Beispiel 7.1.8. Sei G die Matrizengruppe aus Beispiel 7.1.4. Die Teilmenge H von G bestehend aus den 5×5-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen und Determinante ± 1 ist eine Untergruppe von G. (Hier sollte man sich klar machen, dass die zweite Bedingung aus der Definition von *Untergruppe* tatsächlich erfüllt ist.)

Beispiel 7.1.9. Sei Σ_S die symmetrische Gruppe aus Beispiel 7.1.4. Sei t irgendein Element von S. Die Teilmenge H von Σ_S bestehend aus allen bijektiven Abbildungen $f: S \to S$, die $f(t) = t$ erfüllen (für dieses t), ist eine Untergruppe.

Beispiel 7.1.10. Sei X ein metrischer Raum mit Metrik d. Wenn wir X einfach als Menge auffassen, dann können wir von der symmetrischen Gruppe Σ_X sprechen. Diese Gruppe Σ_X hat eine (für uns sehr wichtige) Untergruppe $\mathrm{isom}(X)$. Die Elemente von $\mathrm{isom}(X)$

sind diejenigen bijektiven Abbildungen $f: X \to X$, die abstandserhaltend sind. Wir nennen $\mathrm{isom}(X)$ die *Gruppe der Isometrien von* X *nach* X, oder ähnlich.

Definition 7.1.11. Sei G eine Gruppe mit Multiplikation $\mu: G \times G \to G$ und neutralem Element 1_G. Sei ausserdem K eine Gruppe mit Multiplikation $\nu: K \times K \to K$ und neutralem Element 1_K. Eine Abbildung $\psi: G \to K$ heisst *Homomorphismus* von Gruppen, wenn $\psi(1_G) = 1_K$ und ausserdem für alle $x, y \in G$ gilt

$$\psi(\mu(x,y)) = \nu(\psi(x), \psi(y)).$$

(Dafür kann man natürlich auch kürzer schreiben: $\psi(1) = 1$ und $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ für alle $x, y \in G$.) Ein Homomorphismus heisst *Isomorphismus*, wenn er zusätzlich bijektiv ist.

Beispiel 7.1.12. Die Abbildung exp ist ein berühmter Isomorphismus von der Gruppe G der reellen Zahlen (mit $\mu(x,y) = x + y$ und 0 als neutralem Element) nach Gruppe K der positiven reellen Zahlen (mit $\nu(x,y) = xy$, gewöhnliches Produkt in $\mathbb{R}$, und $1 \in \mathbb{R}$ als neutralem Element). Denn es gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

und natürlich auch $\exp(0) = 1$.

Beispiel 7.1.13. Sei G die Matrizengruppe aus Beispiel 7.1.4. Sei K die Gruppe der von Null verschiedenen reellen Zahlen (mit $\nu: K \times K \to K$ gegeben durch $\nu(a,b) = ab$, das gewöhnliche Produkt von reellen Zahlen, und der üblichen Interpretation von 1). Die Abbildung $\det: G \longrightarrow K$ ist ein berühmter Homomorphismus. Denn es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Beispiel 7.1.14. Sei $\mathbb{H}$ die hyperbolische Ebene, aufgefasst als metrischer Raum mit der hyperbolischen Metrik d^{Φ}. Sei G die Gruppe der 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen und Determinante ± 1. In Bemerkung 4.2.3 und Theorem 4.2.4 und in Aufgabe 5.4.1 haben wir aus einer Matrix

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$$

eine Isometrie $f_M: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ gebaut durch $f_M(z) = (az+b)/(cz+d)$ falls $\det(M) = +1$, bzw. $f_M(z) = (a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d)$ falls $\det(M) = -1$. In Aufgabe 5.4.1 sollte gezeigt werden, dass die Abbildung von G nach $\mathrm{isom}(\mathbb{H})$ definiert durch $M \mapsto f_M$ ein Homomorphismus von G nach $\mathrm{isom}(\mathbb{H})$ ist.

Definition 7.1.15. Sei $\psi: G \to K$ ein Homomorphismus von Gruppen. Der *Kern von* ψ ist

$$\ker(\psi) := \{x \in G \mid \psi(x) = 1 \in K\}.$$

Proposition 7.1.16. *Der Kern von einem Homomorphismus* $\psi: G \to K$ *ist immer eine Untergruppe von* G.

Beweis. Wegen $\psi(1_G) = 1_K$ ist $1_G \in \ker(\psi)$. Wenn $x, y \in \ker(\psi) \subset G$, dann $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y) = 1_K \cdot 1_K = 1_K$, und daraus folgt $xy \in \ker(\psi)$. Wenn $x \in \ker(\psi)$ und $y \in G$ mit $xy = 1_G$, dann $1_K = \psi(1_G) = \psi(xy) = \psi(x)\psi(y) = \psi(y)$, also $y \in \ker(\psi)$. □

Proposition 7.1.17. *Ein Gruppenhomomorphismus* $\psi: G \to K$ *ist genau dann injektiv, wenn* $\ker(\psi)$ *nur ein Element hat, das heisst* $\ker(\psi) = \{1_G\}$.

Beweis. Eine Richtung ist trivial. Für die andere Richtung: Angenommen $\ker(\psi) = \{1_G\}$. Wir denken uns zwei Elemente $x, y \in G$, für die $\psi(x) = \psi(y)$ gilt. Wir wählen $z \in G$ mit $yz = 1_G$. Dann ist

$$\psi(xz) = \psi(x)\psi(z) = \psi(y)\psi(z) = \psi(yz) = \psi(1_G) = 1_K$$

und damit $xz \in \ker(\psi)$, und damit $xz = 1_G$. Weil das (Links)inverse von z eindeutig ist, folgt $x = y$. □

7.2. Wirkungen von Gruppen

Definition 7.2.1. Eine Wirkung einer Gruppe G auf einer Menge S (englisch: action of a group G on a set S) ist eine Abbildung

$$\alpha\colon G \times S \longrightarrow S$$

die die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $\alpha(1, t) = t$ für alle $t \in S$ (wobei 1 das neutrale Element von G bezeichnet);
- *Assoziativität*: $\alpha(x, \alpha(y, t)) = \alpha(xy, t)$ für alle $x, y \in G$ und $t \in S$.

Statt $\alpha(x, t)$ schreibt man oft xt (wobei $x \in G$ und $t \in S$, und dann $xt \in S$). Dann lauten die Bedingungen so: $1t = t$ für alle $t \in S$, und $x(yt) = (xy)t$ für alle $x, y \in G$ und $t \in S$.

Bemerkung 7.2.2. Eine Wirkung α von G auf S ist genau dasselbe wie ein Gruppenhomomorphismus $\psi\colon G \to \Sigma_S$.
Ganz kurz skizziert: Gegeben Wirkung α von G auf S. Wir bauen den entsprechenden Gruppenhomomorphismus $\psi\colon G \to \Sigma_S$ wie folgt. Für $x \in G$ ist $\psi(x)$ die bijektive Abbildung von S nach S definiert durch $t \mapsto \alpha(x, t)$ für beliebige $t \in S$. (Sie ist wirklich bijektiv, weil eine Inverse dazu gegeben ist durch $t \mapsto \alpha(x^{-1}, t)$.) — Umgekehrt, gegeben Gruppenhomomorphismus $\psi\colon G \to \Sigma_S$. Die entsprechende Wirkung α von G auf S ist definiert durch $\alpha(x, t) = \psi(x)(t)$ für beliebige $x \in G$ und $t \in S$. Das ist sinnvoll, weil $\psi(x)$ eine bijektive Abbildung von S nach S ist und als solche auf $t \in S$ losgelassen werden kann.

Beispiel 7.2.3. Die Gruppe G der reellen 5×5-Matrizen mit Determinante $\neq 0$ macht eine Wirkung α auf der Menge $\mathbb{R}^5$ wie folgt: $\alpha(A, v) = Av$ für $A \in G$ und $v \in \mathbb{R}^5$. Hierbei soll $v \in \mathbb{R}^5$ als Spaltenvektor (genauer, als 5×1-Matrix) gelesen werden. $Av \in \mathbb{R}^5$ ist dann das Matrixprodukt, wieder eine 5×1-Matrix.

Beispiel 7.2.4. Sei T die Teilmenge von Σ_4 bestehend aus den bijektiven Abbildungen $f\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, die $f \circ f = \mathrm{id}$ erfüllen und $f(x) \neq x$ für alle $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. Die Menge T hat drei Elemente. Eine Wirkung α von Σ_4 auf T kann wie folgt definiert werden: für $g \in \Sigma_4$ und $f \in T$ ist $\alpha(g, f) = g \circ f \circ g^{-1} \in T$.
Die Wirkung α entspricht einem Gruppenhomomorphismus von Σ_4 nach Σ_T. Er ist ganz interessant. Weil T genau 3 Elemente hat, die wir durchnummerieren können, können wir hier auch Σ_3 statt Σ_T schreiben.

Definition 7.2.5. Sei $\alpha\colon G \times S \to S$ eine Wirkung von Gruppe G auf Menge S. Für festes $t \in S$ sei

$$G_t = \{x \in G \mid xt = t\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass G_t eine Untergruppe von G ist. Sie heisst *Standgruppe*[1] von t (für die Wirkung α).

[1] Oder auch Stabilisatorgruppe, oder auch Isotropiegruppe ...

Sei $\alpha\colon G \times S \to S$ eine Wirkung von Gruppe G auf Menge S. Wir führen eine Relation $\flat_\alpha$ auf S ein. Für $s,t \in S$ soll gelten $(s,t) \in \flat_\alpha$ falls $x \in G$ existiert mit $\alpha(x,s) = t$; in Kurzschreibweise, $xs = t$.

LEMMA 7.2.6. *Diese Relation* $\flat_\alpha$ *auf* S *ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Reflexiv: für $t \in S$ ist $1t = t$, also $(t,t) \in \flat_\alpha$. Symmetrisch: wenn $(s,t) \in \flat_\alpha$, dann $xs = t$ für ein $x \in G$, also $s = x^{-1}t$ für dasselbe x, also $(t,s) \in \flat_\alpha$. Transitiv: wenn $(s,t) \in \flat_\alpha$ und $(t,r) \in \flat_\alpha$, dann $xs = t$ für ein $x \in G$ und $yt = r$ für ein $y \in G$, also $(yx)s = y(xs) = yt = r$ und damit $(s,r) \in \flat_\alpha$. □

DEFINITION 7.2.7. Die Äquivalenzklassen von $\flat_\alpha$ heissen *Bahnen* (englisch *orbits*) der Wirkung α. (Also: zwei Elemente $s,t \in S$ gehören zur selben Bahn der Wirkung genau dann, wenn $x \in G$ existiert mit $xs = t$. Weil die Bahnen Äquivalenzklassen sind, ist S die disjunkte Vereinigung der verschiedenen Bahnen.)
Manchmal ist es hilfreich, die Sache so auszudrücken. Sei $t \in S$. Die *Bahn von* t (bei der gegebenen Wirkung) ist

$$Gt = \{xt \mid x \in G\},$$

eine Teilmenge von S. Daran ist auf den ersten Blick nichts, was schwierig aussieht. Aber: diese Bahnen können eben auch als Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation definiert werden. Deswegen gilt für beliebige $s,t \in S$: entweder $Gt = Gs$ oder $Gt \cap Gs = \varnothing$. Das ist bemerkenswert.

BEISPIEL 7.2.8. Sei G die Gruppe der 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Z}$ und Determinante 1. Sei $\mathbb{Z}^2$ die Menge der 2×1-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Z}$. (Sie dürfen die Elemente von $\mathbb{Z}^2$ auch *Spaltenvektoren* mit ganzzahligen Einträgen nennen, aber Vorsicht, $\mathbb{Z}^2$ ist kein Vektorraum in irgendeinem vernünftigen Sinn). Durch Multiplikation von 2×2-Matrizen mit 2×1-Matrizen erhalten wir in der üblichen Weise eine Wirkung von G auf $\mathbb{Z}^2$. Es stellt sich heraus, dass zwei Elemente

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

von $\mathbb{Z}^2$ genau dann zur selben Bahn der Wirkung gehören, wenn

$$\text{g.g.T}(a,b) = \text{g.g.T}(c,d).$$

(Wahrscheinlich ist das eine Übungsaufgabe.)

DEFINITION 7.2.9. Die Wirkung α heisst *transitiv*, falls zu beliebigen $s,t \in S$ ein $x \in G$ existiert mit $\alpha(x,s) = t$, in Kurzschreibweise, $xs = t$. Gleichwertig dazu: die Wirkung hat nur eine Bahn.

Sei α eine *transitive* Wirkung von G auf S und sei $t \in S$ ein ausgewähltes Element. Dann haben wir die Standgruppe G_t , Untergruppe von G. Es soll demnächst gezeigt werden, dass man in gewisser Weise die Menge S und die Wirkung α rekonstruieren kann aus der der Standgruppe G_t als Untergruppe von G. Dazu brauchen wir aber noch ... den folgenden Abschnitt.

7.3. Nebenklassen, normale Untergruppen und Homomorphiesatz

DEFINITION 7.3.1. Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Wir führen eine Äquivalenzrelation η_H auf G ein wie folgt. Für $x,y \in G$ soll gelten $(x,y) \in \eta_H$ genau

dann, wenn $z \in H$ existiert mit $x = yz$. (Es ist wirklich eine Äquivalenzrelation; siehe Bemerkung 7.3.3.)
Für jedes $x \in G$ kann die Äquivalenzklasse von x nach dieser Äquivalenzrelation beschrieben werden als

$$xH = \{xz \mid z \in H\},$$

Teilmenge von G. (Siehe Bemerkung 7.3.3.) Diese Äquivalenzklassen heissen *Linksnebenklassen von* H *in* G. Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit G/H bezeichnet.
Manchmal ist es hilfreich, die Sache so auszudrücken. Für jedes $x \in G$ ist $xH = \{xz \mid z \in H\}$ diejenige Linksnebenklasse von H, die x enthält. An dieser Beschreibung von xH ist nichts, was schwierig wäre. Aber weil diese Linksnebenklassen auch als Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation beschrieben werden können, gilt für beliebige $x, y \in G$: entweder $xH = yH$ oder $xH \cap yH = \varnothing$. Das ist bemerkenswert.[2]

Beispiel 7.3.2. Sei $G = \mathbb{Z}$ die (abelsche) Gruppe der ganzen Zahlen mit der üblichen Addition als Gruppenstruktur. (Wir benutzen additive Schreibweise, also $+$ statt $\cdot$ und 0 für das neutrale Element.) Sei $H = 7\mathbb{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen, die durch 7 teilbar sind. Das ist eine Untergruppe von G. Die Relation η_H bedeutet jetzt folgendes. Ganze Zahlen x und y sind in dieser Relation, $(x, y) \in \eta_H$, genau dann, wenn eine durch 7 teilbare ganze Zahl z existiert mit $x = y + z$. Man kann auch sagen: $(x, y) \in \eta_H$ genau dann, wenn x und y kongruent modulo 7 sind, $x \equiv y \mod 7$.
Obwohl G und H beide unendlich sind, hat H nur 7 (Links-)Nebenklassen in G. Es sind die Äquivalenzklassen der Elemente $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \in G$. Weitere gibt es nicht! Wenn Sie fragen: was ist denn mit der Äquivalenzklasse von 23, dann ist die Antwort: das ist doch die Äquivalenzklasse von 2, die schon aufgeführt wurde. Die Äquivalenzklassen können also beschrieben werden als

$$7\mathbb{Z},\ 1 + 7\mathbb{Z},\ 2 + 7\mathbb{Z},\ 3 + 7\mathbb{Z},\ 4 + 7\mathbb{Z},\ 5 + 7\mathbb{Z},\ 6 + 7\mathbb{Z}.$$

Und wenn Sie wissen wollen, wo ihr Lieblingselement $23 + 7\mathbb{Z}$ steht in dieser Liste: es steht da, wo $2 + 7\mathbb{Z}$ steht. Um es noch deutlicher zu sagen:

$$2 + 7\mathbb{Z} = 23 + 7\mathbb{Z}.$$

Es handelt sich hier um eine Gleichheit zwischen *Teilmengen von* $\mathbb{Z}$.

Bemerkung 7.3.3. Die Relation η_H auf G ist wirklich eine Äquivalenzrelation. *Reflexivität*: Für jedes $x \in G$ ist $x = x \cdot 1$ mit $1 \in H$, also $(x, x) \in \eta_H$. *Symmetrie*: Wenn $x, y \in G$ und $(x, y) \in \eta_H$, dann $x = yz$ für ein $z \in H$, und dann ist $y = xz^{-1}$ wobei $z^{-1} \in H$ weil $z \in H$. *Transitivität*: Wenn $w, x, y \in G$ und $(w, x) \in \eta_H$ und $(x, y) \in \eta_H$, dann ist $w = xz_1$ für ein $z_1 \in H$ und $x = yz_2$ für ein $z_2 \in H$, also $w = xz_1 = (yz_2)z_1 = y(z_2z_1)$, wobei $z_2z_1 \in H$ weil $z_1, z_2 \in H$. □

Lemma 7.3.4. *Sei* H *eine Untergruppe von* G. *Für jede Linksnebenklasse von* H *in* G, *geschrieben etwa in der Form* xH *mit* $x \in G$, *gibt es eine Bijektion* $H \to xH$ *gegeben durch Multiplikation von links mit* x, *also* $y \mapsto xy$ *für* $y \in H$.

[2]Vergleiche Definition 7.2.7. Hier gibt es offenbar eine Analogie. Man kann es so sagen: die Linksnebenklassen von H in G sind eigentlich so etwas wie Bahnen einer Wirkung der Gruppe H auf der Menge G. Das ist auch garnicht schwer zu sehen, nur muss man etwas vorsichtig sein. Diese sogenannte Wirkung ist, wie man sagt, von rechts, so dass man die Bedingung für eine Wirkung, wie wir sie kennen, etwas umschreiben müsste, um dieses Beispiel zu legitimieren.

Beweis. Das ist eigentlich klar. Die inverse Bijektion $xH \to H$ ist gegeben durch Multiplikation von links mit x^{-1}. Beachten: diese Abbildungen hängen natürlich stark ab von der Bezeichnung xH, die wir für die Linksnebenklasse gewählt haben. Sie wissen ja, dass aus $xH = x'H$, Gleichheit von Linksnebenklassen, nicht $x = x'$ geschlossen werden kann. □

KOROLLAR 7.3.5. (Satz von Lagrange). *Sei* G *eine* endliche *Gruppe,* H *eine Untergruppe. Sei* $|H|$ *bzw.* $|G|$ *die Anzahl der Elemente von* H *bzw.* G. *Dann ist* $|H|$ *ein Teiler von* $|G|$. *Denn* $|G|/|H|$ *ist die Anzahl der Linksnebenklassen von* H *in* G.

Beweis. Da die Linksnebenklassen von H in G als Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation definiert wurden, ist G die disjunkte Vereinigung der *verschiedenen*[3] Linksnebenklassen (von H in G). Da nach Lemma 7.3.4 jede Linksnebenklasse von H in G genauso viele Elemente hat wie H, muss gelten: Anzahl der Elemente von G ist gleich Anzahl der besagten Linksnebenklassen mal Anzahl der Elemente von H. □

Die *Menge* der Linksnebenklassen von H in G wird, wie schon gesagt, mit G/H bezeichnet. Die *Anzahl* der Linksnebenklassen von H in G wird oft mit $[G:H]$ bezeichnet. (Es muss keine natürliche Zahl sein.)

BEISPIEL 7.3.6. Sei G eine Gruppe und $y \in G$. Es gibt dann eine kleinste Untergruppe von G, die das Element y enthält. Sie wird mit $\langle y \rangle$ bezeichnet und besteht aus allen Elementen von G, die die Form y^k haben für ein $k \in \mathbb{Z}$.
Dabei ist beispielsweise y^3 zu lesen als yyy, und y^{-3} ist zu lesen als $y^{-1}y^{-1}y^{-1}$, oder auch als $(yyy)^{-1}$, was dasselbe ist. Ausserdem soll y^0 als $1 \in G$ gelesen werden.
Wir unterscheiden zwei Fälle. *Fall 1*: die Elemente y^k mit $k \in \mathbb{Z}$ sind allesamt verschieden. Dann hat $\langle y \rangle$ unendlich viele Elemente, und G erst recht. *Fall 2*: die Elemente y^k mit $k \in \mathbb{Z}$ sind nicht allesamt verschieden. Behauptung: es gibt dann eine ganze Zahl $m \geq 1$ derart, dass $\langle y \rangle$ genau m verschiedene Elemente hat, und diese sind

$$y^0, y^1, y^2, \ldots, y^{m-1}.$$

Beweis von Behptg.: Nach Voraussetzung existieren verschiedene $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $y^k = y^\ell$ in G. OBdA ist $k > \ell$. Dann ist $y^{k-\ell} = 1 \in G$. Also existiert ein $m > 0$ mit $y^m = 1$. Wir suchen uns das kleinste m von dieser Art. Die Elemente $y^0, y^1, \ldots, y^{m-1}$ von G sind jetzt allesamt verschieden, denn sonst wäre $y^r = y^s$ für verschieden $r, s \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, mit $r < s$, und dann $y^{s-r} = 1$ im Widerspruch zur Minimalität von m. Ausserdem ist schon klar, dass diese Elemente $y^0, y^1, \ldots, y^{m-1}$ eine Untergruppe von G bilden, unter Benutzung von $y^m = 1$. (Zum Beispiel ist y^{m-1} das Inverse von $y = y^1$, denn $y^1 y^{m-1} = y^m = 1$.) Diese Untergruppe muss dann $\langle y \rangle$ sein, denn sie enthält y und kleiner geht es nicht.

KOROLLAR 7.3.7. *Sei* G *eine endliche Gruppe und* $y \in G$. *Dann gibt es eine kleinste positive ganze Zahl* m *mit* $y^m = 1$, *und dieses* m *ist ein Teiler von* $|G|$. *Demnach ist auch* $y^{|G|} = 1$.

Beweis. Die Existenz vom kleinsten m haben wir in Beispiel 7.3.6 gezeigt und dabei gesehen, dass die Untergruppe $\langle y \rangle$ von G genau m Elemente hat. Nach dem Satz von Lagrange muss also m ein Teiler von $|G|$ sein. □

[3]Vorsicht: Zwei Linksnebenklassen von H in G gelten dann als verschieden, wenn sie als Teilmengen von G verschieden sind. Ob sie verschiedene Namen haben, interessiert hier nicht so sehr. Aus $x \neq x'$ dürfen wir nicht ohne Weiteres $xH \neq x'H$ schliessen.

Beispiel 7.3.8. Sei p eine Primzahl, $\mathbb{F}_p$ der Körper der ganzen Zahlen mod p und $\mathbb{F}_p^\times = \mathbb{F}_p \smallsetminus \{0\}$, aufgefasst als Gruppe mit der Multiplikation im Körper als Gruppenstruktur.[4] Offenbar ist $|\mathbb{F}_p^\times| = p-1$. Also gilt für jedes $y \in \mathbb{F}_p^\times$, dass $y^{p-1} = 1 \in \mathbb{F}_p^\times$. Diese Beobachtung nennt man den *kleinen Satz von Fermat*.
Etwas weniger abstrakt ausgedrückt: wenn y eine ganze Zahl ist, die nicht durch p teilbar ist, dann ist y^{p-1} kongruent zu 1 modulo p ... das heisst, p teilt $y^{p-1}-1$. Beispiel von Beispiel: 5 ist nicht durch 691 teilbar; also ist $5^{690}-1$ durch 691 teilbar.[5]

Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Wir fragen jetzt, ob man die Menge G/H der Linksnebenklassen in vernünftiger Weise zu einer Gruppe machen kann. Folgende Definition einer Multiplikation in G/H bietet sich an:

$$xH \cdot yH := (xy)H.$$

Das ist aber nicht *wohldefiniert*. Denn es kann sein, dass $xH = x'H$ (obwohl zum Beispiel $x \neq x'$), und dann müssten wir darauf bestehen, dass $(xy)H = xH \cdot yH = x'H \cdot yH = (x'y)H$. Aber wir können darauf nicht bestehen, denn leider kann es passieren, dass

$$(xy)H \neq (x'y)H$$

obwohl $xH = x'H$. Wie kommt das?

Definition 7.3.9. Eine Untergruppe H von G heisst *normal*, wenn für jedes $x \in G$ gilt, dass $xHx^{-1} = H$. Dabei ist xHx^{-1} eine Abkürzung für

$$\{xyx^{-1} \mid y \in H\}.$$

Beispiel 7.3.10. Sei $f\colon G \to K$ ein Homomorphismus von Gruppen. Dann ist $\ker(f)$ eine normale Untergruppe von G.
Beweis: $(y \in \ker(f)) \Rightarrow (f(y) = 1) \Rightarrow (\forall x \in G : xf(y)x^{-1} = 1) \Rightarrow (\forall x \in G : f(xyx^{-1}) = 1) \Rightarrow (\forall x \in G : xyx^{-1} \in \ker(f))$.

Wenn H eine normale Untergruppe von G ist, und $x, y, x' \in G$, und ausserdem $xH = x'H$, dann dürfen wir schliessen

$$(xy)H = (x'y)H.$$

Warum? Weil $xH = x'H$, können wir schreiben $x' = xh$ für ein $h \in H$. Dann ist

$$(x'y)H = (xhy)H = xy(y^{-1}hy)H.$$

Hier ist $y^{-1}hy \in H$ nach Voraussetzung, also $xy(y^{-1}hy)H = (xy)H$ wie erhofft. Ausserdem: wenn $x \in G$ und $y, y' \in G$ mit $yH = y'H$, dann folgt ohne Probleme $(xy)H = x(yH) = x(y'H) = (xy')H$. Zusammenfassend:

Proposition 7.3.11. *Wenn H eine normale Untergruppe von G ist, dann ergibt die Formel*

$$xH \cdot yH := (xy)H$$

eine wohldefinierte Abbildung $G/H \times G/H \to G/H$. Sie macht die Menge G/H zu einer Gruppe. Die Abbildung $G \to G/H$ gegeben durch $x \mapsto xH$ ist dann ein surjektiver Homomorphismus. Sein Kern ist H.

[4] Wenn Sie schon wussten, dass $\mathbb{F}_p$ ein Körper ist, dann müssten Sie daraus auch sofort schliessen können, dass $\mathbb{F}_p^\times$ eine Gruppe ist, denn es geht hier nur um die Existenz von Inversen. Umgekehrt, wenn Sie Zweifel an der Existenz von Inversen für beliebige Elemente von $\mathbb{F}_p^\times$ haben, dann haben Sie vielleicht gute Gründe, müssten aber daraus sofort schliessen können, dass Sie bis jetzt garnicht wussten, dass $\mathbb{F}_p$ ein Körper ist! Ein volles Geständnis wäre dann angebracht.

[5] 691 ist meine Lieblingsprimzahl.

Beweis: Mechanisch.

THEOREM 7.3.12. (Homomorphiesatz.) *Sei* $f: G \to H$ *ein Homorphismus von Gruppen. Dann ist* $\mathrm{im}\, f$ *eine Untergruppe von* H. *Eine Abbildung*

$$\varphi: G/\ker(f) \longrightarrow \mathrm{im}\, f$$

ist wohl-definiert durch die Formel $\varphi(x\ker(f)) := f(x) \in H$. *Sie ist ein Isomorphismus von Gruppen.*

Beweis. $\mathrm{im}\, f$ ist Untergruppe: klar. Wohldefinierte Abbildung φ: angenommen $x, y \in G$ und $x\ker(f) = y\ker(f)$, Gleichheit von Linksnebenklassen. Dann ist $x = yz$ für ein $z \in \ker(f)$. Dann ist $f(x) = f(yz) = f(y)f(z) = f(y)$, was zu zeigen war. Abbildung φ surjektiv: klar. Gruppenhomomorphismus: klar. Abbildung φ injektiv: weil schon Homomorphismus, genügt es, zu zeigen, dass $\ker(\varphi)$ nur aus dem neutralen Element von $G/\ker(f)$ besteht. Wenn $x \in G$ und wenn die Linksnebenklasse $x\ker(f) \in G/\ker(f)$ zum Kern von φ gehört, dann ist $f(x) = 1$ und damit $x \in \ker(f)$. Also ist $x\ker(f) = \ker(f)$ in der Tat das neutrale Element von $G/\ker(f)$. □

7.4. Transitive Wirkungen und Linksnebenklassen

Sei α eine *transitive* Wirkung von einer Gruppe G auf einer Menge S. Für $x \in G$ und $s \in S$ schreiben wir wie üblich xs statt $\alpha(x, s)$.
Wir wählen jetzt ein $t \in S$. Sei G_t die Standgruppe von t, Definition 7.2.5.

THEOREM 7.4.1. *Es gibt eine Bijektion von der Menge der Linksnebenklassen* G/G_t *nach* S, *definiert durch* $xG_t \mapsto xt$.

Beweis. Abbildung wohldefiniert: angenommen $x, y \in G$ und $xG_t = yG_t$. Dann ist $x = yz$ für ein $z \in G_t$. Demnach ist $xs = (yz)s = y(zs) = ys$, denn $zs = s$ wegen $z \in G_t$. Abbildung surjektiv: folgt aus der Transitivität der Wirkung. Abbildung injektiv: angenommen $x, y \in G$ und $xt = yt$. Dann ist $y^{-1}xt = t$, also $y^{-1}x \in G_t$. Wenn wir $z = y^{-1}x$ setzen, dann ist also $x = yz$ und $z \in G_t$. Damit ist $xG_t = yG_t$, wzbw. □

BEMERKUNG 7.4.2. Dieser Satz und sein Beweis deuten an, dass eine transitive Wirkung von G auf einer beliebigen Menge S vollständig beschrieben werden kann, wenn wir nur die Standgruppe G_t für ein fest gewähltes $t \in S$ kennen, als Untergruppe von G.
Das ist auch richtig. Dazu sollte man sich erst Folgendes klarmachen. Sei H irgendeine Untergruppe von G. Sei G/H die Menge der Linksnebenklassen. Dann gibt es eine sehr naheliegende[6] Wirkung β von G auf G/H. Sie ist gegeben durch

$$\beta(x, yH) = (xy)H$$

(wobei $x \in G$ beliebig, $yH \in G/H$ eine beliebige Linksnebenklasse von H in G, usw.). Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Bedingungen für eine Wirkung erfüllt sind. — Jetzt spezialisieren wir: $H = G_t$, Standgruppe wie oben. Die Bijektion von G/G_t nach S, die wir oben konstruiert haben (nennen wir sie ψ), erfüllt dann die Bedingung

$$\psi(\beta(x, yG_t)) = \alpha(x, \psi(yG_t))$$

für beliebige $x \in G$ und $yG_t \in G/G_t$ (denn beide Seiten kann man ganz mechanisch zu xyt vereinfachen). Als Gleichung ist das vielleicht ein bisschen trocken, aber in Worten ist es einleuchtend: erst ein beliebiges $x \in G$ wirken lassen (in G/G_t) und dann ψ anwenden ist dasselbe wie erst ψ anwenden und dann x wirken lassen (in S).

[6] Der Standardausdruck bei Mathematikern ist *kanonisch*, was vielleicht so etwas wie heilig bedeutet.

Der Satz 7.4.1 führt zu einer beliebten Zählmethode. Wir stellen uns vor, dass wir die Anzahl der Elemente von S bestimmen wollen. Nach dem Satz oben ist sie gleich der Anzahl der Elemente von G/G_t. Im Fall von endlichem G ist das auch gleich $|G|/|G_t|$ nach dem Satz von Lagrange.

Beispiel 7.4.3. Sei $T = \{1,2,3,4,\dots,100\}$ und sei S die Menge der 17-elementigen Teilmengen von T. Wieviele Elemente hat S ? Sie kennen natürlich die Antwort. Aber ich will sie jetzt aus Satz 7.4.1 herleiten, um den Satz zu illustrieren und anzupreisen.
Sei also $G = \Sigma_T$ die Gruppe der bijektiven Abbildungen von T nach T. Diese Gruppe wirkt auf der Menge S durch die Formel

$$\tau \cdot K = \tau(K)$$

für $\tau \in G = \Sigma_T$ und $K \in S$. Entschlüsselung: τ ist eine Bijektion von T nach T und K ist eine 17-elementige Teilmenge von T, und $\tau(K)$ ist die 17-elementige Teilmenge von T, die wir durch Anwenden von τ auf K erhalten. — Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Bedingungen für eine Wirkung erfüllt sind und dass diese Wirkung transitiv ist. Wir suchen uns ein besonderes $K \in S$ aus, also zum Beispiel

$$K_0 = \{1,2,3,\dots,16,17\}.$$

Wie sieht die Standgruppe G_{K_0} aus? Sie besteht aus allen Bijektionen von T nach T, die die Teilmenge K_0 in sich selbst überführen (und daher auch $T \smallsetminus K_0$ in sich selbst überführen). So ein Ding besteht im Grunde aus einer Bijektion von K_0 nach K_0 und einer Bijektion von $T \smallsetminus K_0$ nach $T \smallsetminus K_0$. Es ist deshalb leicht zu sehen, dass

$$|G_t| = 17! \cdot (100-17)!\ .$$

Also ist die Anzahl der Elemente von S gleich

$$|G|/|G_t| = \frac{100!}{17! \cdot (100-17)!}\ .$$

Weitere Beispiele dieser Art könnten in den Übungsaufgaben kommen. Ein festlicher Kontext kann dabei nicht gänzlich ausgeschlossen werden.

Diese Zählmethode deutet an, dass bei einer transitiven Wirkung einer Gruppe G auf einer Menge S die Standgruppe G_t (für ein $t \in S$) nicht sehr stark von $t \in S$ abhängt. Denn wenn zum Beispiel G endlich ist, haben wir $|S| = |G|/|G_t|$ und daher $|G_t| = |G|/|S|$, so dass die *Anzahl* der Elemente von G_t nicht von t abhängt. Man könnte vermuten, dass G_t überhaupt nicht von t abhängt, aber ganz so einfach ist es nicht. Stattdessen:

Lemma 7.4.4. *Sei G eine Gruppe, S eine Menge, α Wirkung von G auf S; wir schreiben ys statt $\alpha(y,s)$ für $s \in S$ und $y \in G$. Für festes $t \in S$ und festes $x \in G$ gilt*

$$G_{xt} = xG_tx^{-1} = \{xyx^{-1} \mid y \in G_t\}.$$

Beweis. $y \in G_t$ ist gleichwertig zu $yt = t$, auch zu $yx^{-1}(xt) = t$, auch zu $xyx^{-1}(xt) = xt$, auch zu $xyx^{-1} \in G_{xt}$. □

7.5. Übungsaufgaben

Aufgabe 7.5.1. Sei $\mathcal{S}$ der Kreis (im Euklidischen Sinn) in $\mathbb{C}$ mit Zentrum $5i/4$ und Radius $3/4$. Dieses $\mathcal{S}$ ist auch eine Teilmenge von $\mathbb{H}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ auch im Sinn der hyperbolischen Metrik ein Kreis ist. Das heisst: $\mathcal{S}$ besteht aus allen Elementen von $\mathbb{H}$, die von einem gewissen z in $\mathbb{H}$ einen gewissen festen Abstand r (im Sinn der hyperbolischen Metrik) haben. Was ist dieses $z \in \mathbb{H}$ und was ist dieses positive $r \in \mathbb{R}$? [5]

(ii) Bestimmen Sie den *Kreisumfang* von $\mathcal{S}$ als Kreis im Sinn der hyperbolischen Metrik. [6]

Bei (ii) darf geschummelt werden gemäss folgender Anleitung. Wir haben, oder kriegen demnächst, eine komplizierte Definition von Bogenlänge bei Kreisbögen (in metrischen Räumen X, die Axiom I und II erfüllen). Diese komplizierte Definition benutzt Annäherung durch Polygone. Im Fall $X = \mathbb{H}$ kann man sich aber denken, dass die Definition mit Annäherung durch Polygone uns nur zurückführt auf die gewichtete Kurvenlänge bei Kostenfunktion Φ, wobei $\Phi(z) = 1/\mathrm{Im}\,(z)$ für $z \in \mathbb{H}$. Akzeptieren Sie das bitte. Demnach sollen Sie $\mathcal{S}$ durch eine glatte Kurve γ parameterisieren und die gewichtete Kurvenlänge $L^{\Phi}(\gamma)$ bestimmen.[7]

Aufgabe 7.5.2. In dieser Aufgabe bezeichnet $\mathbb{F}_3$ den Körper der ganzen Zahlen modulo 3. Er hat genau drei Elemente, die Sie zum Beispiel $\underline{0}$, $\underline{1}$ und $\underline{2}$ nennen können.[8]
Sei G die Menge der 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{F}_3$ und Determinante $1 \in \mathbb{F}_3$. Durch Matrixmultiplikation wird aus dieser Menge eine Gruppe.

(i) Wieviele Elemente hat G ?

Sei V der 2-dimensionale Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_3$ bestehend aus den Spaltenvektoren mit 2 Einträgen aus $\mathbb{F}$.

(ii) Wieviele Elemente hat V ?
(iii) Sei $P(V)$ die Menge der 1-dimensionalen $\mathbb{F}_3$-Untervektoräume von V. Wieviele Elemente hat $P(V)$?

Durch Multiplikation von Matrizen mit Spaltenvektoren erhalten wir in der üblichen Weise eine Wirkung α von G auf der Menge V. Das heisst, für $A \in G$ und $v \in V$ ist ganz einfach $\alpha(A, v) = Av$, Produkt von 2×2-Matrix A mit 2×1-Matrix v.

(iv) Erklären Sie, wie oder warum diese Wirkung α von G auf V eine Wirkung β von G auf $P(V)$ bestimmt in der Weise, dass für jedes $L \in P(V)$ und $v \in V$ und $A \in G$ gilt: wenn $v \in L$, dann $\alpha(A, v) \in \beta(A, L)$.

Nach einer allgemeinen Beobachtung (Vorlesungsnotizen Woche 7 oder 8) entspricht diese Wirkung einem Homomorphismus von G nach $\Sigma_{P(V)}$. Statt $\Sigma_{P(V)}$ kann man auch ganz gut Σ_k schreiben, wobei k die Anzahl der Elemente von $P(V)$ ist ... die ich Ihnen nicht verraten will.

(v) Ist dieser Homomorphismus bijektiv? Injektiv? Wenn nicht injektiv, was ist sein Kern?

---

[7] Das kann zu einem schwierigen Integral führen. Nicht gleich aufgeben. Für mich war die Formel $1 + \sin t = 2\cos^2(t/2 - \pi/4)$ nützlich, und danach die Substitution $t = \arctan s$. Zum Schluss hin musste ich feststellen, dass ich den Kreis an einer ungünstigen Stelle aufgetrennt hatte. Das habe ich dann korrigiert. Aber vielleicht machen Sie ja ganz andere Erfahrungen.

[8] Wenn Sie das nicht kennen, dann sagen Sie sich, dass jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein $\underline{n} \in \mathbb{F}_3$ bestimmt. Weitere Elemente gibt es nicht in $\mathbb{F}_3$. Finden Sie sich damit ab, dass $\underline{m} = \underline{n}$, wenn $m - n \in \mathbb{Z}$ durch 3 teilbar ist. Produkt und Summe von $\underline{m}$ und $\underline{n}$ finden Sie, indem Sie erst Produkt mn bzw. Summe $m + n$ in $\mathbb{Z}$ bilden und dann einen Strich darunter machen. (Beispiel: $\underline{5} \cdot \underline{7} = \underline{35}$. Andererseits ist natürlich $\underline{5} = \underline{2}$ und $\underline{7} = \underline{4}$. Also ist auch $\underline{5} \cdot \underline{7} = \underline{2} \cdot \underline{4} = \underline{8}$. Also müsste $\underline{35} = \underline{8}$ gelten, sonst haben wir ein Problem! Da ist aber kein Problem.)

7.6. Noch mehr Übungsaufgaben

Aufgabe 7.6.1. Wieviele Worte kann man durch Umordnen der Buchstaben in

$$\mathsf{GOODKINGWENCESLASLOOKEDOUTONTHEFEASTOFSTEPHEN}$$

erhalten? Alle vorhandenen Buchstaben(typen) müssen so häufig verwendet werden, wie sie vorhanden sind. Zum Beipiel muss das O genau sieben mal vorkommen. Wir fragen aber nicht, ob diese Worte einen Sinn ergeben. Zum Beispiel wäre

$$\mathsf{DOOGGNIKSALSECNEWDEKOOLTUONOEHTTSAEFFONEHPETS}$$

eins von den zugelassenen Worten. Auch das Originalwort $\mathsf{GOODK...HEN}$ soll mitgezählt werden. — Erwünscht sind Antworten, die den Begriff *Wirkung einer Gruppe auf einer Menge* vernünftig anwenden.

Aufgabe 7.6.2. Sei G die Gruppe bestehend aus den 2×2-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$ und Determinante 1; die Gruppenstruktur soll gegeben sein durch Matrixmultiplikation. Sei S die Menge der 2×1-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$. Durch Multiplikation von Matrizen mit “Spaltenvektoren” in der üblichen Weise erhalten wir eine Wirkung α der Gruppe G auf der Menge S. Beispiel:

$$\alpha\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

(i) Zeigen Sie: Die Bahn dieser Wirkung, die das Element

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in S$$

enthält, besteht aus allen

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in S$$

mit $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$. (Dabei bedeutet ggT: grösster gemeinsamer Teiler.)[9]

(ii) Zeigen Sie, dass zwei Elemente von S, etwa

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix},$$

genau dann zur selben Bahn dieser Wirkung gehören, wenn $\mathrm{ggT}(u,v) = \mathrm{ggT}(p,q)$.

Aufgabe 7.6.3. Es ist bekannt, dass die Gruppe der positiven reellen Zahlen (mit gewöhnlicher Multiplikation als Gruppenstruktur) isomorph ist zur Gruppe $\mathbb{R}$ (mit gewöhnlicher Addition als Gruppenstruktur). Ist die Gruppe der positiven rationalen Zahlen (mit gewöhnlicher Multiplikation als Gruppenstruktur) auch isomorph zur Gruppe $\mathbb{Q}$ (mit gewöhnlicher Addition als Gruppenstruktur) ?
Hilfestellung: suchen Sie sich mal zwei verschiedene Elemente $x, y \in \mathbb{Q}$ aus, wobei $\mathbb{Q}$ die gewöhnliche Addition als Gruppenstruktur hat. Dann gibt es eine kleinste Untergruppe H von $\mathbb{Q}$, die x und y enthält. Was können sie über H als Gruppe *an sich* sagen?

[9] Wenn a, b nicht beide Null sind, dann ist $\mathrm{ggT}(a,b)$ die grösste positive ganze Zahl, die sowohl a als auch b teilt. Wenn $a = b = 0$, dann soll $\mathrm{ggT}(a,b) = 0$ sein.

CHAPTER 8

Die euklidische Ebene

In diesem Kapitel arbeiten wir mit einem metrischen Raum X, der die Axiome I, II und jetzt auch III erfüllt. Ziel ist es, zu zeigen, dass es eine Isometrie von X nach $\mathbb{E}$ (euklidische Ebene) gibt.
Strategisch gesprochen hat die Argumentation zwei grössere Teile. Nach Vorbereitungen (Abschnitte 11.1 und 11.2) wird im ersten Teil (in den Abschnitten 11.3 und 11.4) gezeigt, dass es eine Isometrie von X nach T gibt, wobei T ein normierter reeller Vektorraum ist — mit der Metrik, die durch die Norm bestimmt wird. Im zweiten Teil (Abschnitt 11.5) wird gezeigt: Wenn X ein normierter reeller Vektorraum ist, der als metrischer Raum die Axiome I und II erfüllt, dann hat X als reeller Vektorraum die Dimension 2 und die Norm N ist eine euklidische Norm. Das bedeutet

$$N(v) = (v_1^2 + v_2^2)^{1/2}$$

für beliebiges $v \in X$, wobei $v = v_1 e(1) + v_2 e(2)$ mit einer geeigneten Vektorrraumbasis für X bestehend aus Vektoren $e(1)$ und $e(2) \in X$.

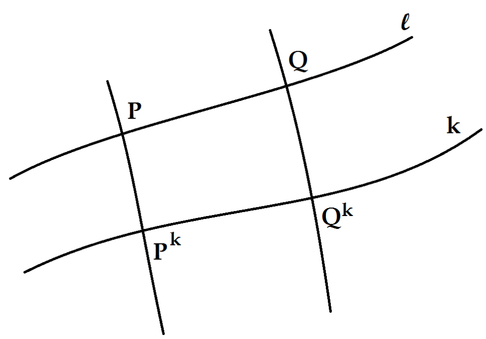
8.1. Erste Konsequenzen aus Axiom III

Proposition 8.1.1. *Die Relation* parallel *ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Angenommen keine Äquivalenzrelation; dann nicht transitiv. Also gibt es verschiedene Geraden k, ℓ, m mit k parallel zu ℓ und k parallel zu m, aber ℓ nicht parallel zu m. Dann haben ℓ und m einen Schnittpunkt. Durch diesen Schnittpunkt gehen also zwei verschiedene Geraden, die beide parallel zu k sind. Widerspruch zu Axiom III. □

Lemma 8.1.2. *Gegeben verschiedene Geraden k und ℓ, die parallel sind. Sei $P, Q \in \ell$. Dann ist*

(i) *die Gerade durch P und P^k senkrecht zu ℓ (und sowieso zu k);*
(ii) *die Gerade durch Q und Q^k senkrecht zu ℓ (und sowieso zu k);*
(iii) $d(P^k, Q^k) = d(P, Q)$;
(iv) $d(P^k, P) = d(Q^k, Q)$.



Beweis. (i) und (ii): Die Senkrechte durch P zur Geraden durch P und P^k ist, wie wir schon wissen, eine Gerade, die parallel zu k ist (und durch P geht). Wegen Axiom III muss sie dann mit ℓ übereinstimmen.
(iii) Wegen Saccheri-Ungleichung haben wir $d(P^k, Q^k) \le d(P, Q)$. Wegen (i) und (ii) haben wir aber auch $P = (P^k)^\ell$ und $Q = (Q^k)^\ell$. Also folgt wieder mit Saccheri $d(P, Q) \le d(P^k, Q^k)$.
(iv) Hier sollte man Namen für die Geraden durch P, P^k bzw Q, Q^k einführen, zum Beispiel m und n. Dann $P^k = (Q^k)^m$ und $P = Q^m$, also $d(P^k, P) \le d(Q^k, Q)$ wegen Saccheri. Ungleichung $d(Q^k, Q) \le d(P^k, P)$ genauso. □

KOROLLAR 8.1.3. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 8.1.2 ist die Abbildung $\ell \to k$ gegeben durch $P \mapsto P^k$ für $P \in \ell$ eine Isometrie (wobei k, ℓ mit Unterraum-Metriken ausgestattet).* □

DEFINITION 8.1.4. Zwei orientierte Geraden k, ℓ heissen *orientiert parallel*, wenn parallel und wenn die Isometrie aus Korollar 8.1.3 die Orientierungen erhält.

LEMMA 8.1.5. Orientiert parallel *ist eine Äquivalenzrelation. (Die Äquivalenzklassen heissen ... wahrscheinlich ...* Richtungen.*)* □

8.2. Wirkung der Isometriegruppe auf Menge der Richtungen

Sei $\mathcal{R}$ die Menge der Richtungen. Sei $Q \in X$ fest gewählt und sei $\mathcal{S}$ der Kreis um Q mit Radius r, wie in Vorlesungsnotizen Woche 9 und 10 (also $r > 0$ auch fest gewählt, klein genug).

LEMMA 8.2.1. *Die Abbildung $u: \mathcal{S} \to \mathcal{R}$, die jedem $P \in \mathcal{S}$ die Gerade durch Q und P zuordnet (so orientiert, dass $Q < P$), ist eine Bijektion.*

Beweis. Injektion: wenn $u(P_1) = u(P_2)$, dann ist Gerade durch Q und P_1 parallel zu Gerade durch Q und P_2, also sind diese Geraden gleich (Name k). Da k nur höchstens zwei Schnittpunkte mit $\mathcal{S}$ hat, ist entweder $P_1 = P_2$ oder $Q \in [P_1, P_2]$. Im zweiten Fall finden wir aber, dass P_1 und P_2 verschiedene Orientierungen auf k bestimmen, Widerspruch zu $u(P_1) = u(P_2)$.
Surjektion: Zu jeder Geraden k in X gibt es eine dazu parallele Gerade ℓ, die durch Q geht. Zu ℓ gehören zwei Schnittpunkte mit $\mathcal{S}$, etwa P_1 und P_2. Wenn k auch noch orientiert ist, dann ist entweder $u(P_1)$ oder $u(P_2)$ orientiert parallel zu k. □

Sei $G = \mathrm{isom}(X)$. Wir haben jetzt eine Wirkung von G auf $\mathcal{R}$. (Isometrie $\sigma: X \to X$ kann losgelassen werden auf Richtung, d.h. Äquivalenzklasse von orientierten Geraden unter der Relation *orientiert parallel* ... dazu sollte man Repräsentanten wählen usw.).

DEFINITION 8.2.2. Eine Isometrie $\psi: X \to X$ heisst *Translation*, wenn sie trivial wirkt auf der Menge $\mathcal{R}$ der Richtungen ... das heisst, für jede orientierte Gerade k ist die orientierte Gerade $\psi(k)$ orientiert parallel zu k.

BEMERKUNG 8.2.3. Wirkung von G auf $\mathcal{R}$ bedeutet, dass wir einen Homomorphismus von G nach symmetrischer Gruppe $\Sigma_{\mathcal{R}}$ haben. Die Translationen sind genau die Elemente von G, die zum Kern dieses Homomorphismus gehören. Also bilden die Translationen eine *normale Untergruppe* T von G.

THEOREM 8.2.4. *Zu beliebigen* $P, Q \in X$ *existiert genau eine Translation* $\psi: X \to X$, *die* $\psi(Q) = P$ *erfüllt.*

Beweis. Sei M der Mittelpunkt vom Segment $[Q, P]$. Wir versuchen es mit $\psi = \tau_P \tau_M = \tau_P \circ \tau_M$, wobei τ_M die Punktspiegelung an M ist (*half-turn* bei Iversen) und τ_P die Punktspiegelung an P. Dann ist $\tau_M(Q) = P$ und $\tau_P(P) = P$, also $\psi(Q) = P$ wie erhofft. Ausserdem: für eine Gerade k und irgendeine Punktspiegelung τ ist $\tau(k)$ parallel zu k. (Kleine Übungsaufgabe. Gedanke: wenn da ein Schnittpunkt $C \in k \cap \tau(k)$ ist, dann auch $\tau(C) \in k \cap \tau(k)$.) Allerdings, wenn k orientiert ist, dann hat $\tau(k)$, obwohl parallel zu k, die falsche Orientierung. Also wissen wir, wie τ auf $\mathcal{R}$ wirkt: ersetzt jede Richtung durch die Entgegengesetzte (gleiche Gerade mit der anderen Orientierung). Also: eine Hintereinanderausführung von zwei Punktspiegelungen (gerne an verschiedenen Punkten) ist eine Translation. Speziell: $\psi = \tau_P \tau_M$ ist damit eine Translation. Damit ist der Existenzteil vom Beweis abgehakt.
Eindeutigkeit: Wenn es Kandidaten ψ_1 und ψ_2 gibt, dann ist

$$\varphi := \psi_1^{-1} \psi_2$$

eine Translation, die $\varphi(Q) = Q$ erfüllt, also $\varphi \in T \cap G_Q$. Weil φ Translation, wirkt es trivial auf $\mathcal{R}$ und damit auch trivial auf $\mathcal{S}$ (grob gesprochen wegen Lemma 8.2.1; wir benutzen hier die Bijektion u, um $\mathcal{R}$ mit $\mathcal{S}$ zu verwechseln). Es ist leicht, zwei Punkte P_1 und P_2 in $\mathcal{S}$ zu finden, so dass P_1, P_2 und Q nicht auf einer Geraden liegen. Da φ diese drei festlässt (jeden für sich), ist es die Identität. □

LEMMA 8.2.5. *Sei* ψ *eine Translation,* $\psi(Q) = P$, *wobei* $Q \neq P$. *Sei* k *die Gerade durch* Q *und* P. *Dann ist* $\psi(k) = k$.

Beweis. $\psi(k)$ ist parallel zu k nach Voraussetzung an ψ. Sowohl k als auch $\psi(k)$ enthalten den Punkt P. Also $k = \psi(k)$. □

8.3. Mehr über die Gruppe der Translationen

THEOREM 8.3.1. *Die Untergruppe* $T \subset G$ *ist kommutativ.*

Beweis. Wir wählen ein festes $Q \in X$. Sei $\psi \in T$ und sei $\tau \in G_Q$ die Punktspiegelung am Punkt Q. Wir wollen zuerst zeigen:

$$\tau \psi \tau^{-1} = \psi^{-1}.$$

Dazu sei $P = \psi(Q)$. Dann ist $\tau\psi\tau^{-1}(Q) = \tau(\psi(Q)) = \tau(P)$. Also ist $\tau\psi\tau^{-1}$ die eindeutige Translation, die Q auf $\tau(P)$ abbildet. (Hier wird auch Bemerkung 8.2.3 benutzt.) Wenn wir zeigen können, dass ψ^{-1} ebenfalls Q auf $\tau(P)$ abbildet, dann haben wir gewonnen.

Das ist aber ziemlich klar, weil die Einschränkung von ψ auf k als eine Isometrie von k nach k aufgefasst werden kann wegen Lemma 8.2.5. Wir verstehen diese Einschränkung gut genug, weil wir wissen, dass sie orientierungserhaltend ist und Q auf P abbildet.
Jetzt weiter: die Formel $\tau\psi\tau^{-1} = \psi^{-1}$ zeigt, dass die Abbildung $\psi \mapsto \psi^{-1}$ ein Homomorphismus ist, denn die Abbildung $\psi \mapsto \tau\psi\tau^{-1}$ ist ein Homomorphismus. Wenn aber $\psi \mapsto \psi^{-1}$ ein Homomorphismus (von T nach T) ist, dann ist T kommutativ. □

KOROLLAR 8.3.2. *Für* $\psi, \tau \in T$ *und* $A, B \in X$ *ist*

$$d(\psi(A), \tau(A)) = d(\psi(B), \tau(B)),$$

das heisst, $d(\psi(A), \tau(A))$ *hängt nur von* $\psi, \tau \in T$ *ab, dagegen nicht von* $A \in X$.

Beweis. Sei $\lambda: X \to X$ die eindeutige Translation mit $\lambda(A) = B$. Weil λ eine Isometrie ist, erhalten wir $d(\psi(A), \tau(A)) = d(\lambda(\psi(A)), \lambda(\tau(A)))$, und da $\lambda\tau = \tau\lambda$ und $\lambda\psi = \psi\lambda$, ist dieser Ausdruck gleich $d(\psi(\lambda(A)), \tau(\lambda(A))) = d(\psi(B), \tau(B))$. □

DEFINITION 8.3.3. Wir benutzen das Korollar, um eine Metrik auf T zu definieren wie folgt: $d_T(\psi, \tau) := d_X(\psi(A), \tau(A))$ für irgendein $A \in X$. (Es ist dabei egal, welches $A \in X$ genommen wird.) Die Bedingungen für eine Metrik sind erfüllt.

DEFINITION 8.3.4. Wir wählen (oder haben vielleicht schon gewählt) eine festes $Q \in X$ und haben damit eine Abbildung $F: T \to X$ durch $F(\psi) = \psi(Q) \in X$, für $\psi \in T$.

LEMMA 8.3.5. *Diese Abbildung* F *ist eine Isometrie von metrischen Räumen, das heisst, von* T *mit Metrik* d_T *wie in Definition 8.3.3 nach* X *mit Metrik* $d = d_X$.

Beweis. Die Abbildung ist bijektiv wegen Theorem 8.2.4. Isometrie ist eigentlich klar wegen Definition von d_T. □

Auf T haben wir die Struktur einer kommutativen Gruppe wegen Theorem 8.3.1. Man kann sich vorstellen, dass so etwas wie eine Verträglichkeit zwischen der Gruppenstruktur auf T und der Metrik auf T besteht. Das ist richtig.

PROPOSITION 8.3.6. *Für* $\psi, \tau \in T$ *gilt*

$$d_T(\psi, \tau) = d_T(\tau^{-1} \circ \psi, \mathrm{id}).$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ *und* $\psi, \tau \in T$ *gilt* $d_T(\psi^n, \tau^n) = |n| d_T(\psi, \tau)$.

Beweis. Für beliebiges $A \in X$ ist

$$d_T(\psi, \tau) = d_X(\psi(A), \tau(A)) = d_X(\tau^{-1}\psi(A)), \tau^{-1}(\tau(A))) = d_T(\tau^{-1} \circ \psi, \mathrm{id}).$$

Das beweist die erste Behauptung. Wir benutzen das, um zu bemerken

$$d_T(\psi^n, \tau^n) = d_T(\tau^{-n} \circ \psi^n, \mathrm{id}) = d_T((\tau^{-1} \circ \psi)^n, \mathrm{id}),$$

wobei wir für das zweite Gleichheitszeichen die Kommutativität benutzt haben (Theorem 8.3.1). Deswegen führen wir ein $\sigma := \tau^{-1}\psi$ und müssen dann nur noch zeigen

$$d_T(\sigma^n, \mathrm{id}) = |n| d_T(\sigma, \mathrm{id}).$$

Dazu können wir annehmen $\sigma \neq \mathrm{id}$. Sei k die Gerade durch A und $\sigma(A)$, mit irgendeiner Orientierung. Wegen Lemma 8.2.5 haben wir $\sigma(k) = k \subset X$. Das heisst, σ schränkt ein zu einer Isometrie von k nach k, die orientierungserhaltend ist, Definition 8.2.2. Damit wird klar, dass

$$d_X(A, \sigma^n(A)) = |n| d_X(A, \sigma(A)),$$

weil wir hier eigentlich X durch den Unterraum k ersetzen können (und dann noch k durch $\mathbb{R}$). □

8.4. Vektorraumstruktur und Norm

Wir haben schon gesehen, dass die Gruppe T kommutativ ist. Von jetzt an soll diese Gruppenstruktur auch *kommutativ geschrieben* werden: das heisst, wir schreiben $\psi + \varphi$ für das, was bis jetzt $\psi\varphi$ hiess, 0 für das neutrale Element (das vorher id hiess), und $-\psi$ statt ψ^{-1}. Ausserdem schreiben wir auch $n\psi$ für das, was bisher ψ^n geschrieben wurde, wobei $n \in \mathbb{Z}$.

PROPOSITION 8.4.1. *Die kommutative Gruppenstruktur auf* T *lässt sich verfeinern zu einer Struktur von reellem Vektorraum. Ausserdem kommt die Metrik* d_{T} *von einer Norm* N *auf diesem Vektorraum, so dass* $d_{\mathsf{T}}(\psi, \tau) = d_{\mathsf{T}}(\psi - \tau, 0) = \mathsf{N}(\psi - \tau)$ *für alle* $\psi, \tau \in \mathsf{T}$.

BEMERKUNG 8.4.2. Definition von *Norm* auf reellem Vektorraum: Sie kennen das wahrscheinlich aus den Analysisvorlesungen. Eine Norm auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung $\mathsf{N}: V \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $\mathsf{N}(v) \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\mathsf{N}(v) = 0$ genau dann, wenn $v = 0$.
- $\mathsf{N}(cv) = |c|\mathsf{N}(v)$ für $v \in V$ und $c \in \mathbb{R}$.
- $\mathsf{N}(v + w) \leq \mathsf{N}(v) + \mathsf{N}(w)$ für alle $v, w \in V$.

Es ist dann üblich, so etwas wie $\|v\|$ statt $\mathsf{N}(v)$ zu schreiben (aber manchmal ist es auch ein bisschen gefährlich).
Beispiele: $V = \mathbb{R}^2$ und $\mathsf{N}(v) = \max\{|v_1|, |v_2|\}$ oder $\mathsf{N}(v) = (v_1^2 + v_2^2)^{1/2}$ oder $\mathsf{N}(v) = |v_1| + |v_2|$.
Eine Norm N auf einem reellen Vektorraum V bestimmt eine Metrik auf V durch

$$d_V(x, y) := \mathsf{N}(y - x).$$

Es ist leicht, die Bedingungen für eine Metrik nachzuweisen.
Umgekehrt: sei d eine Metrik auf einem reellen Vektorraum V. Wie können wir sehen, ob sie zu einer Norm auf V gehört? Sie muss dazu erfüllen

$$d(x, y) = d(x + z, y + z)$$

für alle $x, y, z \in V$ und

$$d(cx, cy) = |c|d(x, y)$$

für alle $x, y \in V$ und $c \in \mathbb{R}$. Das genügt; dann können wir die zugehörige Norm definieren durch $\mathsf{N}(x) = d(0, x)$.

BEMERKUNG 8.4.3. Sei H irgendeine kommutative Gruppe. Wir benutzen additive Schreibweise, also $a + b$ statt wie sonst ab für $a, b \in H$, und 0 statt wie sonst 1, und $-a$ statt a^{-1} für $a \in H$, und na statt a^n für $a \in H$ und $n \in \mathbb{Z}$. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ haben wir dann einen Homomorphismus

$$g_n : H \to H$$

definiert durch $g_n(a) = na$.
Jetzt soll angenommen werden, dass dieser Homomorphismus g_n bijektiv ist, und zwar für jede strikt positive ganze Zahl n. (Dann ist g_n auch bijektiv für strikt negatives n.) *Dann hat die Gruppe* H *automatisch die Struktur eines Vektorraums über dem Körper* $\mathbb{Q}$ *der rationalen Zahlen.* Das geht ungefähr so. Sei $c = p/q \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$, gerne $q > 0$. Skalarmultiplikation mit c müsste dasselbe sein wie: Skalarmultiplikation mit p gefolgt von Skalarmultiplikation mit q^{-1}, und das ist

$$(g_q)^{-1} \circ g_p \ .$$

Da wir vorausgesetzt haben, dass g_q bijektiv ist, ist das kein Problem und wir haben auch garkeine Wahl.

BEMERKUNG 8.4.4. Fortsetzung der letzten Bemerkung: Sei H ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$. Angenommen, H ist ausgerüstet mit einer *Norm* $N\colon H \to \mathbb{R}$; das heisst, es soll gelten $N(x) \geq 0$ für alle $x \in H$, $N(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ für alle $x, y \in H$ und $N(cx) = |c|N(x)$ für $c \in \mathbb{Q}$ und $x \in H$. Die Norm bestimmt in der üblichen Weise eine Metrik,

$$d_H(x, y) = N(y - x).$$

Jetzt nehmen wir noch zusätzlich an: für jede Folge von rationalen Zahlen $(c_n)_{n=0,1,2,\ldots}$, die in $\mathbb{R}$ konvergiert, gegen eine reelle Zahl c, und jedes $x \in H$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} c_n x\ .$$

Hier reden wir von Konvergenz im metrischen Raum H mit Metrik d_H wie oben definiert. *Dann können wir definieren*

$$cx := \lim_{n\to\infty} c_n x$$

für $x \in H$ *und* $c = \lim_n\ c_n \in \mathbb{R}$*, und damit wird* H *zu einem Vektorraum über* $\mathbb{R}$*, und* N *wird eine Norm im reellen Vektorraum-Sinn.* Wir müssen das natürlich ein bisschen rechtfertigen.

Erstens. Unsere Definition von cx ist un-zweideutig (wohldefiniert). Denn wenn wir eine andere Folge $(c'_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ von rationalen Zahlen wählen, die ebenfalls gegen c konvergiert, dann können wir die beiden Folgen zu einer einzigen kombinieren, etwa so:

$$c_0, c'_0, c_1, c'_1, c_2, c'_2, \ldots .$$

Diese dritte Folge konvergiert immer noch gegen c und daher konvergiert nach Voraussetzung auch die Folge

$$c_0x, c'_0x, c_1x, c'_1x, c_2x, c'_2x, \ldots$$

im metrischen Raum H. Woraus wir schliessen dürfen, dass die Folgen $c_0x, c_1x, c_2x, \ldots$ und $c'_0x, c'_1x, c'_2x, \ldots$ gegen dasselbe Element von H konvergieren.

Zweitens. Mit unserer Definition von cx müssen wir $(c+c')x = cx+c'x$ zeigen für beliebige $c, c' \in \mathbb{R}$ und $x \in H$. Dazu wählen wir eine Folge von rationalen Zahlen $(c_n)_{n=0,1,\ldots}$, die gegen c konvergiert, und eine Folge von rationalen Zahlen $(c'_n)_{n=0,1,\ldots}$, die gegen c' konvergiert. Dann konvergiert $(c_n + c'_n)_{n=0,1,\ldots}$ gegen $c + c'$. Auserdem ist

$$\begin{array}{rl} & N((c+c')x - cx - c'x) \\ \leq & N((c+c')x - c_nx - c'_nx) + N(c_nx + c'_nx - cx - c'x) \\ = & N((c+c')x - (c_n + c'_n)x) + N(c_nx + c'_nx - cx - c'x). \end{array}$$

Da der letzte Ausdruck für $n \to \infty$ gegen 0 geht, muss der erste Ausdruck Null sein. Also $(c+c')x = cx + c'x$.

Drittens. Mit unserer Definition von cx müssen wir zeigen $c(x+y) = cx + cy$ für beliebige $c \in \mathbb{R}$ und $x, y \in H$. Dazu wählen wir eine Folge von rationalen Zahlen $(c_n)_{n=0,1,\ldots}$, die gegen c konvergiert. Dann ist

$$\begin{array}{rl} & N(c(x+y) - cx - cy) \\ \leq & N(c(x+y) - c_n(x+y)) + N(c_n(x+y) - cx - cy) \\ = & N(c(x+y) - c_n(x+y)) + N(c_nx + c_ny - cx - cy) \\ \leq & N(c(x+y) - c_n(x+y)) + N(c_nx - cx) + N(c_ny - cy). \end{array}$$

Da der letzte Ausdruck für $n \to \infty$ gegen 0 geht, muss der erste Ausdruck Null sein. Also $c(x+y) = cx + cy$.

Viertens. Wir müssen zeigen $N(cx) = |c|N(x)$ für beliebiges $x \in H$ und $c \in \mathbb{R}$. Dazu wählen wir eine Folge von rationalen Zahlen $(c_n)_{n=0,1,\dots}$, die gegen c konvergiert. Dann ist

$$N(cx) = \lim_n N(c_n x) = \lim_n |c_n| N(x) = |c|N(x).$$

Die erste Gleichheit drückt aus, dass N stetig ist. Das ist fast eine Tautologie, weil $|N(x) - N(y)| \le N(x - y) = d_H(x, y)$ für beliebige $x, y \in H$.

Beweis von Prop. 8.4.1. Wegen Bemerkung 8.4.3 fangen wir damit an, zu zeigen, dass für jede ganze Zahl $n > 0$ der Homomorphismus $g_n : T \to T$ gegeben durch $g_n(\psi) = n\psi$ (gleich n-fache Iteration von ψ) bijektiv ist. Dazu beschreiben wir ihn etwas besser: gegeben $\psi \in T$, etwa mit $\psi(Q) = P$, und wir können annehmen $P \neq Q$. Sei k die Gerade durch Q und P. Die Einschränkung von ψ auf k ist dann eine gewöhnliche Translation der Geraden k, die Q nach P schickt, wegen Lemma 8.2.5. (Hier stelle ich mir k "wie $\mathbb{R}$" vor, weil es ja eine Isometrie $f : \mathbb{R} \to k$ gibt. Es ist praktisch, so ein f zu wählen mit $f(0) = Q$.) Demnach ist die n-fache Iteration von ψ die eindeutige Translation, die Q auf denjenigen Punkt P' von $k \subset X$ schickt, der n-mal so weit von Q entfernt ist wie P, in derselben Richtung, so dass $P \in [Q, P']$. Damit ist klar, dass g_n bijektiv ist, denn wir können die inverse Abbildung dazu explizit angeben.

Jetzt wollen wir auch noch Bemerkung 8.4.4 ausnutzen. Dazu brauchen wir eine Norm auf dem rationalen Vektorraum T. Die haben wir schon: $N(\psi) := d_T(\psi, 0)$ (Vorsicht, additive Schreibweise). Die Metrik d_T können wir aus der Norm N rekonstruieren wegen Proposition 8.3.6; Vorsicht, da wird multiplikative Schreibweise benutzt, hier additive Schreibweise. Der zweite Teil dieser Proposition sagt uns auch, dass tatsächlich $N(c\psi) = |c|N(\psi)$ gilt für $c \in \mathbb{Q}$. (Man kann leicht auf den Fall $c \in \mathbb{Z}$ reduzieren.)

Da war aber noch eine Bedingung in Bemerkung 8.4.4. Die müssen wir überpüfen. Gegeben eine Folge von rationalen Zahlen $(c_n)_{n=0,1,2,\dots}$, die in $\mathbb{R}$ gegen ein c konvergiert. Gegeben $\psi \in T$. Existiert dann $\lim_n c_n\psi$ im metrischen Raum T ? Wir können annehmen, dass $\psi(Q) = P$ mit $P \neq Q$. Wir parameterisieren die Gerade k durch Q und P mit einer abstandserhaltenden Abbildung $f : \mathbb{R} \to X$, und zwar so, dass $f(0) = Q$. Dann ist $P = f(a)$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und daher

$$\lim_n \, (c_n\psi)(Q) = \lim_n \, f(c_n a) = f(ca).$$

Daraus folgt, dass $\lim_n c_n\psi$ existiert und gleich der eindeutigen Translation ist, die Q auf $f(ca) \in k \subset X$ schickt.

Damit ist eigentlich alles gezeigt, was zu zeigen war. □

8.5. Axiome I und II bei normiertem Vektorraum

Wie versprochen machen wir jetzt folgende Annahmen: X ist ein reeller Vektorraum mit Norm $N : X \to \mathbb{R}$, und dadurch auch ein metrischer Raum mit Metrik gegeben durch $d_X(v, w) = N(v - w)$ für $v, w \in X$. Ausserdem soll X als metrischer Raum mit Metrik $d = d_X$ die Axiome I und II erfüllen.

Lemma 8.5.1. *Eine abstandserhaltende Abbildung* $f : \mathbb{R} \to X$ *muss die Form*

$$f(t) = v + tw$$

haben, wobei $v, w \in X$ *und* $N(w) = 1$. *Es folgt, dass die Geraden von* X *im metrischen Sinn genau die Geraden im Sinn der linearen Algebra sind, und auch, dass die Segmente im metrischen Sinn genau die Segmente im Sinn der linearen Algebra sind.*

Beweis. Ein f von der angegebenen Form ist abstandserhaltend. Also ist $\mathrm{bild}(f)$ für jedes dieser f eine Gerade im metrischen Sinn. Wenn $k \subset X$ irgendeine Gerade im metrischen Sinn ist, dann können wir zwei Punkte in k wählen und ein f wie oben erfinden, so dass $\mathrm{bild}(f)$ diese beiden Punkte mit k gemeinsam hat; also ist $k = \mathrm{bild}(f)$. Also sind die Geraden im metrischen Sinn genau die Geraden im Sinn der LA. Wenn $g\colon \mathbb{R} \to X$ eine abstandserhaltende Abbildung ist, dann muss demnach $\mathrm{bild}(g) = \mathrm{bild}(f)$ sein für ein f wie oben, $f(t) = v + tw$; also ist $f^{-1} \circ g$ eine abstandserhaltende Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Da wir diese gut kennen, können wir schliessen, dass auch g die Standardform hat. □

KOROLLAR 8.5.2. *Die Dimension von* X *als reeller Vektorraum ist* 2.

Beweis. Da die Geraden und Segmente im metrischen Sinn genau die Geraden und Segmente im Sinn der linearen Algebra sind, können wir den ersten Teil von Axiom II (bekannt als Paschs Axiom) leicht überprüfen: ohne Benutzung von Metrik, nur unter Benutzung von LA. Es klappt nur, wenn die Dimension gleich 2 ist.

KOROLLAR 8.5.3. X *erfüllt* Axiom III.

Beweis. Zu jeder Geraden k in X (im Sinn der LA) und Punkt A von $X \smallsetminus k$ existiert genau eine Gerade (im Sinn der LA), die keinen Punkt mit k gemeinsam hat. (Hier wird benutzt, dass X die Dimension 2 hat.) Da die Geraden im Sinn der LA genau die Geraden im Sinn der Metrik ... usw. □

LEMMA 8.5.4. *Sei* $k \subset X$ *eine Gerade, die* 0 *enthält. Dann ist die Abbildung* senkrechte Projektion auf k, *als Abbildung von* X *nach* k, *eine* $\mathbb{R}$*-lineare Abbildung.*

Beweis. Sei p der Name dieser Abbildung. Aus unseren Studien von vor langer Zeit wissen wir noch, dass das Urbild $\ell = p^{-1}(0)$ eine Gerade ist (im metrischen Sinn, also hier auch im Sinn der linearen Algebra), die 0 enthält, also ein 1-dimensonaler Untervektorraum von X, verschieden von k. Für jedes $A \in k$ ist $p^{-1}(A)$ eine Gerade (im metrischen Sinn, also hier auch im Sinn der linearen Algebra), die A enthält und parallel zu ℓ ist; also muss $p^{-1}(A) = A + \ell$ gelten. Damit haben wir eine vollständige Beschreibung von p (mit Hilfe von ℓ und k), und sie zeigt, dass p linear ist. □

KOROLLAR 8.5.5. *Die Norm* N *hat die Form* $N(v) = \sqrt{\beta(v,v)}$, *wobei* $\beta\colon X \times X \to \mathbb{R}$ *eine symmetrische* $\mathbb{R}$*-bilineare Abbildung ist, mit der Eigenschaft* $\beta(v,v) \geq 0$ *für alle* $v \in X$.

Beweis. Im Fall $v \neq 0$ versuchen wir es mit der Formel

$$\beta(v,w) = (N(v))^2 \cdot w^{\mathbb{R}v}/v$$

die noch erklärt werden muss: $\mathbb{R}v$ ist der von v erzeugte 1-dimensionale Untervektorraum, auch bekannt als Gerade im metrischen Sinn durch 0 und v, und $w^{\mathbb{R}v}$ die senkrechte Projektion von w auf diese Gerade. Schliesslich ist $w^{\mathbb{R}v}/v$ eine praktische Bezeichnung für dasjenige $c \in \mathbb{R}$, das $w^{\mathbb{R}v} = cv$ erfüllt. (Im Fall $v = 0$ setzen wir $\beta(v,w) = 0$.) Wegen Lemma 8.5.4 ist die Abbildung $w \mapsto \beta(v,w) \in \mathbb{R}$ bei festem $v \in X$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. (Etwas genauer: die Abbildung $w \mapsto w^{\mathbb{R}v}$ ist eine lineare Abbildung von X nach $\mathbb{R}v$, die Abbildung $w \mapsto w^{\mathbb{R}v}/v$ ist daher eine lineare Abbildung von X nach $\mathbb{R}$, und dann ist schliesslich $w \mapsto (N(v))^2 \cdot w^{\mathbb{R}v}/v$ eine lineare Abbildung von X nach $\mathbb{R}$.) Ausserdem sehen wir $\beta(v,v) = (N(v))^2 \cdot v/v = (N(v))^2$. Das ist gut. Ausserdem bemerken wir $\beta(bv,w) = b\beta(v,w)$ für beliebiges $b \in \mathbb{R}$. Das ist auch gut. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $\beta(v,w) = \beta(w,v)$ für alle $v,w \in X$. Dann haben wir automatisch die Bilinearität. Wenn $v = 0$ oder $w = 0$, dann ist das klar. Also können wir annehmen, dass

$v, w \neq 0$. Wir verlieren nichts Wesentliches, wenn wir v durch bv ersetzen für ein reelles $b \neq 0$; also dürfen wir auch noch annehmen $N(v) = N(w) > 0$.
Dazu bemerken wir, dass unsere Definition von $\beta(v, w)$ eigentlich nur metrische Begriffe benutzt, und die Wahl des speziellen Elementes $0 \in X$, sonst aber keine Begriffe aus der linearen Algebra. (Für $\mathbb{R}v$ können wir schreiben *die Gerade durch* 0 *und* v. Für $N(v)$ können wir schreiben $d(0, v)$. Usw.) Das ist gut, denn es gibt eine Isometrie σ von X nach X, die 0 auf 0 abbildet, v auf w und w auf v. Da unsere Definition von β nur metrische Begriffe benutzt, muss gelten

$$\beta(v, w) = \beta(\sigma(v), \sigma(w)) = \beta(w, v).$$

Ich habe das mit den metrischen Begriffen betont, weil ich keine Lust habe, hier etwa zu zeigen, dass die Isometrie σ eine lineare Abbildung ist. □

Es ist jetzt leicht, Elemente $e(1)$ und $e(2)$ von X zu finden, die

$$\beta(e(1), e(1)) = 1 = \beta(e(2), e(2)), \qquad \beta(e(1), e(2)) = 0$$

erfüllen. Dann bilden $e(1)$ und $e(2)$ automatisch eine Basis. Ein beliebiges $v \in X$ kann dann geschrieben werden $v = v_1 e(1) + v_2 e(2)$, wobei $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$. Wegen Bilinearität von β gilt dann

$$\beta(v) = v_1^2 + v_2^2$$

und damit $N(v) = (v_1^2 + v_2^2)^{1/2}$.

CHAPTER 9

Bogenlänge und Winkel

9.1. Wirkung der Isometriegruppe

Wie gewohnt ist X ein metrischer Raum, der Axiome I und II erfüllt. Sei $G = \text{isom}(X)$ die Gruppe der Isometrien von X nach X (mit Zusammensetzung, alias Hintereinanderausführen, als Gruppenoperation). Es gibt eine sehr naheliegende Wirkung von G auf X. Als Abbildung von $G \times X$ nach X ist sie gegeben durch $(\tau, A) \mapsto \tau(A)$. In Kurzschreibweise: $\tau A := \tau(A)$ für $\tau \in G$ und $A \in X$.

Proposition 9.1.1. *Diese Wirkung von G auf X ist transitiv.*

Beweis. Für verschiedene $A, B \in X$ sei $\sigma \in G$ die Geradenspiegelung an der Mittelsenkrechten vom Segment $[A, B]$. Dann ist $\sigma(A) = B$. □

Sei Q ein festes Element aus X und sei G_Q die Standgruppe für diese Wirkung und dieses Q. Das heisst, G_Q ist die Untergruppe von G bestehend aus allen Isometrien $\tau: X \to X$, die die Bedingung $\tau(Q) = Q$ erfüllen. Wir wählen uns ein $r > 0$ und haben damit den Kreis

$$\mathcal{S} = \{A \in X \mid d(Q, A) = r\}.$$

Die Gruppe G_Q wirkt auf $\mathcal{S}$ in der üblichen Weise. Das heisst, als Abbildung von $G_Q \times \mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ ist die Wirkung wieder gegeben durch $(\tau, A) \mapsto \tau(A)$; in Kurzschreibweise $\tau A := \tau(A)$.

Proposition 9.1.2. *Diese Wirkung von G_Q auf $\mathcal{S}$ ist transitiv. Für beliebiges $A \in \mathcal{S}$ hat die Standgruppe $(G_Q)_A$ genau zwei Elemente.*

Beweis. Für verschiedene $A, B \in \mathcal{S}$ sei $\sigma \in G$ die Geradenspiegelung an der Mittelsenkrechten n vom Segment $[A, B]$. Der Punkt Q gehört zu n, denn $d(Q, A) = d(Q, B)$ (wir hatten mal so eine Beschreibung der Mittelsenkrechten, Proposition 6.6.1). Also ist $\sigma(Q) = Q$, also $\sigma \in G_Q$. Ausserdem ist wie im vorigen Beweis $\sigma(A) = B$. Damit ist die Transitivität bewiesen.
Sei jetzt $\tau \in G_Q$ ein Element in der Standgruppe $(G_Q)_A$, das heisst, $\tau(A) = A$. Nach Voraussetzung ist aber auch $\tau(Q) = Q$. Demnach lässt τ alle Punkte auf der Geraden k durch Q und A fest, denn jeder dieser Punkte kann durch seine Abstände zu A und Q bestimmt werden. Wir wissen aber schon, dass es genau zwei Isometrien gibt, die alle Punkte von k festlassen: die Identität und die Spiegelung an k. □

Korollar 9.1.3. (1) *Jede Isometrie $\tau: X \to X$ kann geschrieben werden als Zusammensetzung von höchstens drei Geradenspiegelungen.* (2) *Jede Isometrie $\tau: X \to X$, die wenigstens ein Element von X festlässt, kann geschrieben werden als Zusammensetzung von höchstens zwei Geradenspiegelungen, die dieses Element auch festlassen.* (3) *Jede Isometrie $\tau: X \to X$, die wenigstens zwei Elemente von X festlässt, ist eine Spiegelung an der Geraden durch diese zwei Elemente, oder die Identität.*

Beweis. Es handelt sich hier eigentlich um ein Korollar zu den *Beweisen* von Propositionen 9.1.1 und 9.1.2. Die wesentliche Beobachtung ist, dass wir in diesen Beweisen keine anderen Isometrien erfinden mussten als Geradenspiegelungen. —
Fall (1). Wir wählen $Q \in X$. Wenn $\tau(Q) = Q$, sind wir in Fall (2). Wenn $\tau(Q) \neq Q$, dann können wir wie im Beweis von Proposition 9.1.1 eine Geradenspiegelung σ finden derart, dass $\sigma(\tau(Q)) = Q$. Weil $\tau = \sigma \circ (\sigma \circ \tau)$, haben wir wieder auf Fall (2) reduziert. Auf diese Weise ist Fall (1) vollständig auf Fall (2) zurückgeführt. — Fall (2). Wir dürfen annehmen, dass $\tau(Q) = Q$ für ein $Q \in X$. Wir bauen den Kreis $\mathcal{S}$ wie in Proposition 9.1.2 und wählen $A \in \mathcal{S}$. Wenn $\tau(A) = A$, sind wir in Fall (3). Wenn $\tau(A) \neq A$, dann können wir wie im Beweis von Proposition 9.1.1 eine Geradenspiegelung σ finden derart, dass $\sigma(Q) = Q$ und $\sigma(\tau(A)) = A$. Weil $\tau = \sigma \circ (\sigma \circ \tau)$, haben wir wieder auf Fall (3) reduziert. Auf diese Weise ist Fall (2) vollständig auf Fall (3) zurückgeführt. — Fall (3) ist uns aber schon hinreichend bekannt. □

Beispiel 9.1.4. Sei isom($\mathbb{H}$) die Gruppe der Isometrien von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}$. Sei GL$(2,\mathbb{R})$ die Gruppe der 2×2-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ und Determinante ± 1. Wir hatten jedem Element

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

von GL$(2,\mathbb{R})$ ein $f_M \in$ isom($\mathbb{H}$) zugeordnet, $f_M(z) = (az+b)/(cz+d)$ im Fall det$(M) = 1$ und $f_M(z) = (a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d)$ im Fall det$(M) = -1$. In Übungsaufgaben wurde gezeigt/behauptet, dass diese Zuordnung $M \mapsto f_M$ ein Homomorphismus φ ist von GL$(2,\mathbb{R})$ nach isom($\mathbb{H}$). In Übungsaufgaben wurde gezeigt/behauptet, dass alle Geradenspiegelungen zum Bild von φ gehören. Mit Korollar 9.1.3 folgt jetzt, dass φ surjektiv ist.
Der Kern von φ stimmt überein mit der normalen Untergruppe

$$K := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(Das könnte auch eine Übungsaufgabe werden, aber eine leichte.) Demnach ist (mit Homomorphiesatz) die Gruppe isom($\mathbb{H}$) isomorph zu GL$(2,\mathbb{R})/K$. Weil K eine *normale* Untergruppe ist, dürfen wir hier die Menge der (Links)nebenklassen GL$(2,\mathbb{R})/K$ als Gruppe betrachten. Man schreibt auch gerne PGL$(2,\mathbb{R})$ für GL$(2,\mathbb{R})/K$. (Abkürzungen: GL für *general linear group*, PGL für *projective general linear group.*)

9.2. Kreisbögen

Vorsicht: hier wird unterschieden zwischen *Kreis* und *Kreisscheibe.* Ein Kreis in X (metrischer Raum, der Axiome I und II erfüllt) ist eine Teilmenge der Form

$$\{A \in X \mid d(A,Q) = r\}$$

wobei $Q \in X$ fest gewählt ist (Zentrum des Kreises) und $r \geq 0$ eine festgewählte reelle Zahl ist (Radius des Kreises). Eine Kreisscheibe hat dagegen die Form $\{A \in X \mid d(A,Q) \leq r\}$ (abgeschlossene Kreisscheibe) oder $\{A \in X \mid d(A,Q) < r\}$ (offene Kreisscheibe).

Vorsicht: wie immer ist *Seite einer Geraden* k nicht eine Teilmenge von k, sondern eine Teilmenge von $X \smallsetminus k$. Die Gerade k hat zwei solche Seiten (wegen Axiom II).

Wir wählen jetzt $Q \in X$ und $r > 0$ und haben damit den Kreis

$$\mathcal{S} = \{A \in X \mid d(Q,A) = r\}.$$

Proposition 9.2.1. *Gegeben verschiedene* $A, B \in \mathcal{S}$. *Sei* k *die Gerade in* X *durch* A, B.

- *Für* $E \in [A, B]$ *ist* $d(E, Q) \le r$*, sogar* $d(E, Q) < r$ *falls* $E \ne A, B$.
- *Für* $E \in k \setminus [A, B]$ *ist* $d(E, Q) > r$.

Beweis: kann bei Iversen (Proposition I.5.1) nachgelesen werden. Hier nur eine Skizze. Es fängt damit an, dass wir die senkrechte Projektion Q^k von Q auf k finden. Da Q^k von allen Punkten auf k derjenige und der einzige ist, der den geringsten Abstand von k hat, muss gelten $d(Q, Q^k) < r$. Danach wählen wir eine abstandserhaltende Abbildung $g: \mathbb{R} \to X$ mit $\mathrm{bild}(g) = k$ und $g(0) = Q^k$. Es genügt jetzt, zu zeigen, dass die beiden Funktionen

$$t \mapsto d(Q, g(t)), \qquad t \mapsto d(Q, g(-t))$$

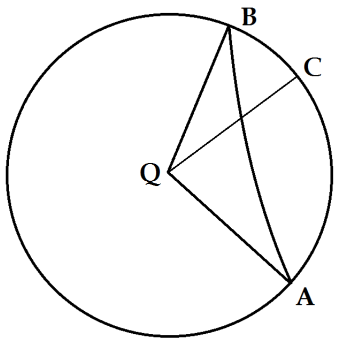
für $t \in [0, \infty)$ monoton wachsend sind. Da schon klar ist, dass der Minimalwert bei $t = 0$ angenommen wird und dass diese Funktionen *stetig* sind, genügt es, zu zeigen, dass sie auch *injektiv* sind. Wenn das nicht der Fall ist (z.B. für die Funktion $t \mapsto d(Q, g(t))$ mit $t \ge 0$), dann gibt es $b > a > 0$ mit $d(Q, g(a)) = d(Q, g(b))$. Sei n die Mittelsenkrechte von $[g(a), g(b)]$. Dann muss gelten $Q \in n$ (Abstandsgleichung für die Mittelsenkrechte) und damit ist n die eindeutige Senkrechte zu k, die Q enthält. Also ist $Q^k = g(0)$ der Mittelpunkt von $[g(a), g(b)]$, und dann muss 0 der Mittelpunkt von $[a, b]$ sein ... Widerspruch. □

Definition 9.2.2. Gegeben $A, B \in \mathcal{S}$. Wir wollen den *minimalen Kreisbogen* $\mathcal{T}_{A,B}$ durch A und B beschreiben, eine Teilmenge von $\mathcal{S}$. (Wenn A, B, Q auf einer Geraden liegen, $A \ne B$, dann wird noch etwas zusätzliche Information benötigt, um ihn eindeutig zu machen.)

- Wenn A, B, Q nicht auf einer Geraden liegen, und auch wenn $A = B$, ist $\mathcal{T}_{A,B} = \{ C \in \mathcal{S} \mid [Q, C] \cap [A, B] \ne \varnothing \}$.
- Wenn $A \ne B$ ist und A, B, Q auf einer einzigen Geraden k liegen, müssen wir noch eine Seite von k aussuchen. Dann sei

  $$\mathcal{T}_{A,B} = \{C \in \mathcal{S} \mid C \in k \text{ oder } C \in \text{ausgesuchte Seite von } k\}.$$

  (Zugegeben: es ist schlecht, dass in diesem Fall die Bezeichnung $\mathcal{T}_{A,B}$ die Seitenwahl nicht anzeigt.)



Beachten: $A, B \in \mathcal{T}_{A,B}$. Wir nennen A, B die *Endpunkte* vom Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,B}$. Da $\mathcal{T}_{A,B}$ als Teilmenge von $\mathcal{S}$ definiert wurde, darf man fragen, ob die Endpunkte sich aus dieser Teilmenge rekonstruieren lassen (ohne weitere Information). Das ist wohl der Fall, aber es ist garnicht so leicht zu zeigen, und ich hoffe, dass wir daran vorbeikommen. — Auch beachten: im Fall $A = B$ ist $\mathcal{T}_{A,B} = \{A\} = \{B\}$.

Lemma 9.2.3. *Gegeben $A, B \in \mathcal{S}$ und Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,B} \subset \mathcal{S}$ wie oben. Sei $C \in \mathcal{T}_{A,B}$. Dann ist*

$$\mathcal{T}_{A,C} \cup \mathcal{T}_{C,B} = \mathcal{T}_{A,B} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{T}_{A,C} \cap \mathcal{T}_{C,B} = \{C\}.$$

Beweis. Die Fälle $C = A$ und $C = B$ sind klar. Wir nehmen jetzt an $C \neq A, B$. Dann folgt erstens, dass $A \neq B$, und zweitens, dass A, B, C nicht auf einer Geraden liegen. Denn die Gerade durch A und B hat wegen Proposition 9.2.1 keine anderen Schnittpunkte mit $\mathcal{S}$ als A und B. — Sei $D \in \mathcal{T}_{A,B}$. Wenn $D \neq A, B, C$, dann muss wegen Paschs Axiom (erster Teil von Axiom II) die Gerade durch Q (Zentrum des Kreises) und D genau eins der Segmente $[A, C]$ und $[B, C]$ kreuzen. Das bedeutet auch, dass entweder $[Q, D] \cap [A, C] \neq \varnothing$ oder $[Q, D] \cap [B, C] \neq \varnothing$, aber nicht beides. Denn andere Elemente der Geraden durch Q und D gehören wegen Proposition 9.2.1 nicht zu $[A, C]$ oder $[B, C]$; sie sind zu weit weg von Q oder auf der falschen Seite der Geraden durch A und B. Also ist $D \in \mathcal{T}_{A,C}$ oder $D \in \mathcal{T}_{C,B}$, aber nicht beides. — Im Fall $D = A$ müssen wir noch zeigen, dass $A \notin \mathcal{T}_{C,B}$. Kurzes Argument: A und B sind auf verschiedenen Seiten der Geraden durch Q und C, also sind $[Q, A] \smallsetminus \{Q\}$ und $[B, C] \smallsetminus \{C\}$ auf verschiedenen Seiten der Geraden durch Q und C. Also ist $[Q, A] \cap [C, B] = \varnothing$. Ähnlich: $B \notin \mathcal{T}_{A,C}$. □

Definition 9.2.4. Gegeben $A, B \in \mathcal{S}$ und minimaler Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,B}$ wie oben. Wir definieren eine Relation $\leq$ auf $\mathcal{T}_{A,B}$ wie folgt. Für $C, D \in \mathcal{T}_{A,B}$ soll gelten $C \leq D$ genau dann[1], wenn $\mathcal{T}_{A,C} \subset \mathcal{T}_{A,D}$.

Lemma 9.2.5. *Diese Relation ist eine Ordnungsrelation. Sie ist also solche auch total, das heisst, wenn $C, D \in \mathcal{T}_{A,B}$, dann gilt $C \leq D$ oder $D \leq C$.*

Beweis. Es ist klar, dass diese Relation transitiv und reflexiv ist. Antisymmetrisch: sei $C \leq D$ und $D \leq C$. Das bedeutet $\mathcal{T}_{A,C} = \mathcal{T}_{A,D}$. Angenommen $C \neq D$. Nun ist

[1]Eigentlich müsste ich ja schreiben $(C, D) \in \leq$.

$C \in \mathcal{T}_{A,C} = \mathcal{T}_{A,D}$, also $\{C\} = \mathcal{T}_{A,C} \cap \mathcal{T}_{C,D}$ nach Lemma 9.2.3 (angewandt mit D anstelle von B). Wegen

$$D \in \mathcal{T}_{A,D} \cap \mathcal{T}_{C,D} = \mathcal{T}_{A,C} \cap \mathcal{T}_{C,D}$$

folgt daraus $D = C$, Widerspruch.
Als Vorbereitung für Beweis von Totalität überlegen wir uns zuerst: wenn $C \in \mathcal{T}_{A,D}$ dann $\mathcal{T}_{A,C} \subset \mathcal{T}_{A,D}$, also $C \le D$. Denn $C \in \mathcal{T}_{A,D}$ bedeutet $\mathcal{T}_{A,D} = \mathcal{T}_{A,C} \cup \mathcal{T}_{C,D}$ nach Lemma 9.2.3.
Totalität: Für $C \in \mathcal{T}_{A,B}$ haben wir $\mathcal{T}_{A,B} = \mathcal{T}_{A,C} \cup \mathcal{T}_{C,B}$. Wenn jetzt $D \in \mathcal{T}_{A,B}$ daherkommt, $D \neq C$, dann ist entweder $D \in \mathcal{T}_{A,C}$ und damit $D \le C$ wie eben gezeigt. Oder es ist $D \in \mathcal{T}_{C,B}$ und damit $C \notin \mathcal{T}_{D,B}$ und damit $C \in \mathcal{T}_{A,D}$ (alles wegen Lemma 9.2.3) und damit $C \le D$. □

9.3. Bogenlänge

Wir bleiben bei den Bezeichnungen vom vorigen Abschnitt.

Definition 9.3.1. Die *Bogenlänge* vom minimalen Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,B}$ wird versuchsweise definiert als die reelle Zahl

$$\sup_{\substack{A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathcal{T}_{A,B} \\ A = A_0 \le A_1 \le \dots \le A_m = B}} \sum_{i=1}^{m} d(A_{i-1}, A_i).$$

Das ist eigentlich klar genug. Der Gedanke ist, dass wir den Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,B}$ durch ein *Polygon* mit Ecken $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$ annähern (wobei $A_0 = A$ und $A_m = B$), also durch

$$[A_0, A_1] \cup [A_1, A_2] \cup [A_2, A_3] \cup [A_{m-1}, A_m],$$

und dann die Gesamtlänge des Polygons, also

$$\sum_{i=1}^{k} d(A_{i-1}, A_i)$$

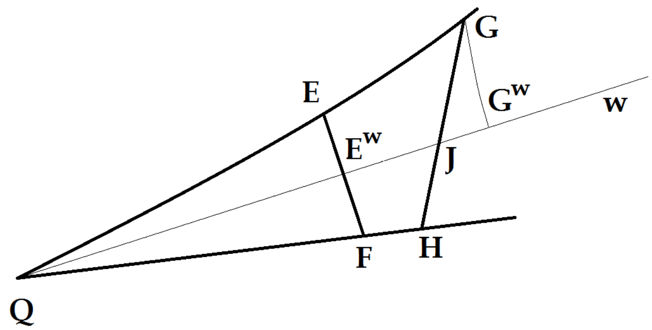
als eine Annäherung an die Bogenlänge betrachten. Dabei darf m (Anzahl der Ecken minus 1) beliebig gross sein. Die Bedingung

$$A_0 \le A_1 \le \dots \le A_m$$

(im Sinne der Ordnungsrelation von Definition 9.2.4) sorgt dafür, dass die verschiedenen Segmente $[A_{i-1}, A_i]$ oder *Kanten* des Polygons einander nicht treffen, ausser in gemeinsamen Endpunkten: $[A_{i-1}, A_i] \cap [A_i, A_{i+1}] = \{A_i\}$.

Es bleibt aber ein kleines Problem: wir haben noch nicht gezeigt, dass das Supremum in der Formel oben existiert.

Lemma 9.3.2. *Gegeben Dreieck* ΔQEF *in* X *mit* $d(Q, E) = d(Q, F) > 0$*, also gleichschenklig. Gegeben* G *auf der Geraden durch* Q *und* E*, und* H *auf der Geraden durch* Q *und* F*, wobei* $E \in [Q, G]$ *und* $F \in [Q, H]$*. Dann ist* $d(E, F) \le d(G, H)$.



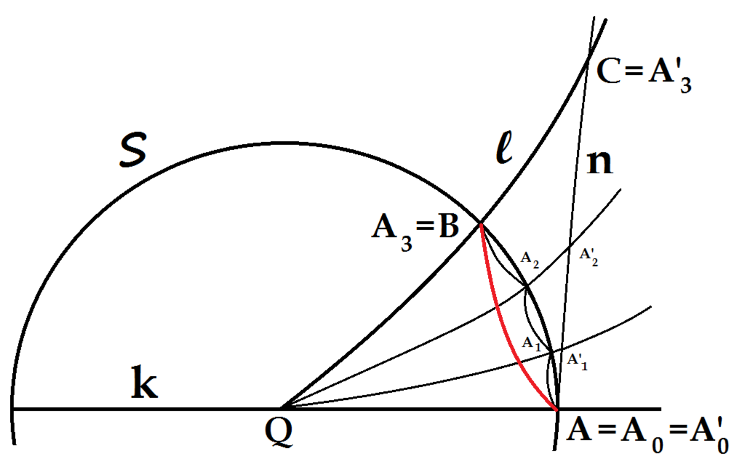
Beweis. Sei w die Mittelsenkrechte von $[E, F]$. Dann ist $Q \in w$ weil $d(Q, E) = d(Q, F)$; siehe Abschnitt 6.6. Das Segment $[G, H]$ muss w in einem Punkt J treffen. (Das ist eine doppelte Anwendung von Paschs Axiom, Aufgabe 2.4.3; erst anwenden auf w und ΔEFH, dann auf w und ΔEHG. Wenn $G = E$ oder $H = F$, was erlaubt ist, dann genügt einmalige Anwendung von Paschs Axiom.) Wir wissen $d(G, J) \geq d(G, G^w)$ wegen Lemma 6.2.2 und $d(G, G^w) \geq d(E, E^w)$ wegen Proposition 6.8.3 (bei Iversen Prop. I.3.8), also $d(E, E^w) \leq d(G, J)$. Ebenso ist $d(F, F^w) \leq d(H, J)$, wobei natürlich $F^w = E^w$. Damit folgt $d(E, F) = d(E, E^w) + d(F, F^w) \leq d(G, J) + d(H, J) = d(G, H)$. □

Lemma 9.3.3. *Mit Bezeichnungen wie in Definition 9.3.1 sei k die Gerade durch Q und $A \in S$; sei ℓ die Gerade durch Q und $B \in \mathcal{S}$; sei n die Senkrechte zu k, die durch A geht. Sei $A_0, A_1, \ldots, A_m$ eine Auswahl von endlich vielen Elementen von $\mathcal{T}_{A,B}$ derart, dass*

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_{m-1} \leq A_m = B.$$

Angenommen, n trifft ℓ in einem Punkt C, und $Q \notin [B, C]$. Dann ist

$$d(A, B) \leq \sum_{i=1}^{m} d(A_{i-1}, A_i) \leq d(A, C).$$



Beweis. Die erste Ungleichung $d(A,B) \le \sum_i d(A_{i-1},A_i)$ ist zwar nützlich, aber sehr bescheiden, denn sie ist ja eine ziemlich direkte Konsequenz aus der Dreiecksungleichung für den metrischen Raum X. Wir konzentrieren uns also auf den Beweis der zweiten Ungleichung. Das Bild gerade oben illustriert sowohl die Aussage als auch den Beweis.

Im Bild ist offenbar $m = 3$. Wir dürfen $A \ne B$ annehmen. Die Punkte A, B, Q können hier nicht auf einer einzigen Geraden liegen, sonst wäre $A = C$ und dann $Q \in [B,C]$ entgegen unseren Annahmen. Die Segmente $[A_{i-1},A_i]$ sind etwas krumm gezeichnet, damit sie sich vom Kreis abheben; das ist erlaubt und erinnert uns auch an Proposition 9.2.1. Das Segment $[A,B]$ ist auch krumm gezeichnet und sogar in Rot, weil es wichtig ist. OBdA ist $A_i \ne A_j$ falls $0 \le i < j \le m$. Der wichtige Gedanke hier ist, dass wir die Gerade durch Q und A_i mit der Geraden n schneiden und so den Schnittpunkt A'_i erhalten. Wegen Lemma 9.3.2 ergibt sich

$$d(A_{i-1},A_i) \le d(A'_{i-1},A'_i)\,.$$

Wie das Bild zeigt, ist dann

$$\sum_i d(A_{i-1},A_i) \le \sum_i d(A'_{i-1},A'_i) = d(A,C).$$

Was fehlt noch? Wir müssen noch zeigen, dass die Schnittpunkte A'_i tatsächlich existieren und dass sie so auf dem Segment $[A,C]$ angeordnet sind, wie das Bild es andeutet.

Das Bild zeigt, dass alle Punkte von n ausser A einen Abstand $> r$ von Q haben, also ausserhalb vom Kreis $\mathcal{S}$ liegen. Das ist gerechtfertigt wegen Lemma 6.2.2 (denn $A = Q^n$, senkrechte Projektion von Q auf die Gerade n).

Es wurde ausserdem vorausgesetzt $Q \notin [B,C]$. Da $Q,B,C \in \ell$ und $d(Q,C) > d(Q,B) = r$, muss gelten $B \in [Q,C]$, wie im Bild.

Es folgt, dass Q und C auf verschiedenen Seiten der Geraden h durch A und B liegen. (Diese Gerade h ist nicht abgebildet, aber das Segment $[A,B]$ ist abgebildet - in Rot.) Da h nur den Punkt A mit n gemeinsam hat, folgt, dass alle Elemente von $[A,C] \smallsetminus \{A\}$ auf der Seite von h liegen, die Q nicht enthält; nennen wir sie die *ferne Seite* von h. Das ist auch die Seite von h, zu der alle Elemente von $\mathcal{T}_{A,B} \smallsetminus \{A,B\}$ gehören. *Zusammenfassung*: alle Elemente von $\mathcal{T}_{A,B} \cup [A,C] \smallsetminus \{A,B\}$ gehören zur fernen Seite der Geraden durch A und B.

Existenz der Schnittpunkte A'_i für $i = 1,2,\ldots,m-1$: Sei k_i die Gerade durch Q und A_i. Wir wenden Paschs Axiom an auf das Dreieck ΔABC und die Gerade k_i, die weder A noch B noch C enthält. Da k_i das Segment $[A,B]$ trifft (wegen $A_i \in \mathcal{T}_{A,B}$) und das Segment $[B,C]$ nicht trifft (wegen $k_i \cap \ell = \{Q\}$ und Voraussetzung $Q \notin [B,C]$), muss k_i wegen Pasch das Segment $[A,C]$ treffen. Den Schnittpunkt nennen wir A'_i. (Paschs Axiom ist eine Umformulierung der ersten Hälfte von Axiom II.) ✓

Richtige Anordnung der A'_i: Gegeben $i,j \in \{0,1,2,\ldots,m\}$ mit $i<j$. Weil

$$\mathcal{T}_{A,B} \cup [A,C] \smallsetminus \{A,B\}$$

in der fernen Seite der Geraden h durch A und B enthalten ist, sind auch die Segmente $[A_j,A'_j]$ in dieser fernen Seite enthalten. Also ist $Q \notin [A_j,A'_j]$. Daher kann $A'_i \in [A,A'_j]$ genauso gezeigt werden, wie es im Fall $j = m$ gezeigt wurde; dabei war $A_m = B$ und $A'_m = C$. ✓ □

Bemerkung 9.3.4. In den Bezeichnungen von Lemma 9.3.3: Der Beweis vom Lemma zeigt auch, dass wir eine Injektion haben von $\mathcal{T}_{A,B}$ nach $[A,C]$, gegeben durch

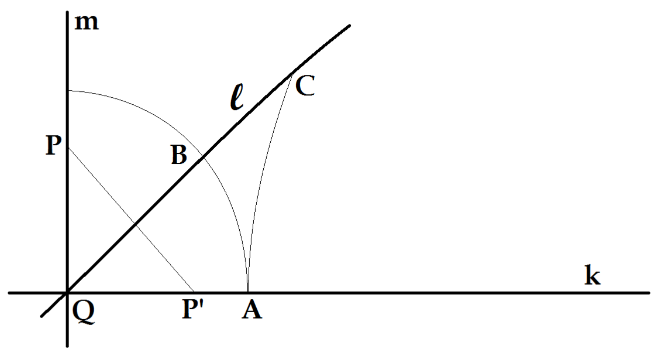
$$\mathcal{T}_{A,B} \ni D \mapsto \textit{Schnittpunkt der Geraden durch } Q \textit{ und } D \textit{ mit } [A,C].$$

Ausserdem ist diese Injektion eine *Bijektion*. Denn sei $E \in [A, C]$. Weil $d(Q, E) \geq r$, hat das Segment $[Q, E]$ genau einen Schnittpunkt D mit $\mathcal{S}$. Wir müssen zeigen, dass $D \in \mathcal{T}_{A,B}$.
Wegen Pasch, angewandt auf ΔABC, hat die Gerade durch Q und E einen Schnittpunkt mit $[A, B]$. Da Q und E zu verschiedenen Seiten der Geraden durch A und B gehören, hat auch $[Q, E]$ einen Schnittpunkt mit der Geraden durch A und B. Es folgt $[Q, E] \cap [A, B] \neq \varnothing$. Daraus folgt $[Q, D] \cap [A, B] \neq \varnothing$, denn die Elemente von $[Q, E] \smallsetminus [Q, D]$ haben Abstand $> r$ von Q. Aber $[Q, D] \cap [A, B] \neq \varnothing$ bedeutet $D \in \mathcal{T}_{A,B}$. □

Wir wählen wir jetzt den Radius $r > 0$ für unseren Kreis $\mathcal{S}$ folgendermassen. Das Zentrum $Q \in X$ des Kreises ist schon ausgesucht und wir wählen zwei Geraden k und m durch Q, die senkrecht zueinander sind. Auf k wählen wir einen Punkt P und auf m einen Punkt P' derart, dass $d(P, Q) = d(P', Q) > 0$. Sei ℓ die Mittelsenkrechte von $[P, P']$. Wir wählen $C \in \ell$ so dass $C \neq Q$. Sei schliesslich $A = C^k$ (senkrechte Projektion von C auf die Gerade k) und sei

$$r = d(Q, A) > 0.$$

Wegen Saccheris Ungleichung ist $r = d(Q, A) \leq d(Q, C)$. Sei $B \in [Q, C]$ derjenige Punkt, der $d(Q, B) = r$ erfüllt.



Für den Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,B}$ gilt dann wegen Lemma 9.3.3, dass die Bogenlänge von $\mathcal{T}_{A,B}$ ordnungsgemäss definiert ist (d.h., das Supremum in Definition 9.3.1 existiert in diesem Spezialfall).
Übrigens: aus Konstruktion und Bild sollte klar sein, dass der Winkel bei Q von ΔQAB, wenn er irgendeinen Sinn hat, die Hälfte des (rechten) Winkels bei Q von $\Delta QPP'$ ist. So gesehen schöpft der minimale Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,B}$ ein Achtel von einem Vollkreis aus.
Diese Wahl von Radius r scheint etwas willkürlich. Das soll uns jetzt nicht stören. Später gibt es vielleicht noch Kommentare dazu.
Man könnte denken, dass r beliebig gross gemacht werden kann, wenn wir nur Q so wählen, dass $d(Q, C)$ sehr gross ist. Stimmt aber nicht.

Proposition 9.3.5. *Für $A, B \in \mathcal{S}$ und $C \in \mathcal{T}_{A,B}$ ist*

$$\text{Bogenlg von } \mathcal{T}_{A,B} = \text{Bogenlg von } \mathcal{T}_{A,C} + \text{Bogenlg von } \mathcal{T}_{C,B}$$

in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann ordnungsgemäss definiert ist, wenn die rechte Seite ordnungsgemäss definiert ist, und in diesem Fall Gleichheit gilt.

Beweis. Wir können annehmen $C \neq A, B$. Die linke Seite war etwas provisorisch definiert als

$$\sup_{\substack{A_0, A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{T}_{A,B} \\ A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_m = B}} \sum_{i=1}^{m} d(A_{i-1}, A_i).$$

Wenn wir zu einer Auswahl $A_0, A_1, \ldots, A_m$ von Teilungspunkten noch den Punkt C als zusätzlichen Teilungspunkt *hinzufügen* (an der richtigen Stelle, etwa $A_j \leq C \leq A_{j+1}$), dann wird in der rechten Seite $d(A_j, A_{j+1})$ ersetzt durch $d(A_j, C) + d(C, A_{j+1})$, was jedenfalls nicht kleiner ist (wegen Dreiecksungleichung in X). Also ist es in Ordnung, in der Definition der Bogenlänge von $\mathcal{T}_{A,B}$ von vornherein nur solche Auswahlen von Teilungspunkten zu erlauben, die C als einen der Teilungspunkte nennen. Solche Auswahlen von Teilungspunkten können geschrieben werden in der Form

$$A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_{s-1} \leq A_s = C = A_0^\sharp \leq A_1^\sharp \leq \cdots A_{t-1}^\sharp \leq A_t^\sharp = B.$$

Die Länge des entsprechenden Polygons ist dann

$$\sum_{i=1}^{s} d(A_{i-1}, A_i) + \sum_{j=1}^{t} d(A_{j-1}^\sharp, A_j^\sharp).$$

Die beiden Summanden sind typische Approximationen der Bogenlänge von $\mathcal{T}_{A,C}$ bzw. $\mathcal{T}_{C,B}$ durch Polygone, wie sie in der Definition dieser Bogenlängen auftauchen. Auf diese Weise ergibt sich die Behauptung. □

Korollar 9.3.6. *Das Supremum in Definition 9.3.1 existiert immer, bei unserer Wahl von Radius* r.

Beweis. Nach Wahl von r ist die Bogenlänge $\mathcal{T}_{A,B}$ ordnungsgemäss definiert, wenn $\mathcal{T}_{A,B}$ ein Achtel von einem Vollkreis darstellt. Nach Proposition 9.3.5 können wir uns dann auch einen Viertelkreis oder einen Halbkreis erlauben. Nach Proposition 9.3.5 können wir uns dann auch jeden Kreisbogen erlauben, der in einem Halbkreis enthalten ist. □

9.4. Die normierte Bogenlängemetrik auf dem Kreis $\mathcal{S}$

Bemerkung 9.4.1. *Kleine Vor- und Rückschau.* Für unseren metrischen Raum X (der Axiome I und II erfüllt) wollen wir $G = \text{isom}(X)$ als Gruppe verstehen, und dann X selbst. Dazu haben wir ein $Q \in X$ gewählt und haben uns erstmal die Untergruppe G_Q von G vorgenommen (Standgruppe bei/für Q der Standardwirkung von G auf X). Die Gruppe G_Q wirkt auch auf $\mathcal{S}$, dem Kreis vom Radius r um Q. Wir versuchen, den Kreis $\mathcal{S}$ als geometrisches Ding besser zu verstehen, dann die Wirkung von G_Q auf dem Kreis, und dadurch schliesslich G_Q selbst. (Und dann G.)
Aber wie versteht man einen Kreis? Wir sollten ihn natürlich als metrischen Raum verstehen. Wir denken mal der Einfachheit halber an den Fall, wo $r = 1$ und $X = \mathbb{E}$ (euklidische Ebene) und $Q = (0,0)$. Es gibt interessanterweise zwei Metriken auf $\mathcal{S}$, die einem in den Sinn kommen. Eine ist die Unterraummetrik. In dieser Metrik ist zum Beispiel der Abstand zwischen $(1,0) \in \mathcal{S}$ und $(0,1) \in \mathcal{S}$ gleich $\sqrt{2}$, und der Abstand zwischen $(1,0) \in \mathcal{S}$ und $(-1,0) \in \mathcal{S}$ ist 2. Eine andere Metrik, die auch sehr nützlich ist, ist die Bogenlängemetrik. In dieser Metrik ist der Abstand zwischen $(1,0) \in \mathcal{S}$ und $(0,1) \in \mathcal{S}$ gleich $\pi/2$, und der Abstand zwischen $(1,0) \in \mathcal{S}$ und $(-1,0) \in \mathcal{S}$ ist π. Man sieht sofort, dass das sehr verschiedene Metriken sind. Sie sind auch nicht proportional zueinander, weil zum Beispiel $2 : \sqrt{2} \neq \pi : (\pi/2)$. Man sieht auch nach und nach, dass die Bogenlängemetrik d^{bg}

in mancher Hinsicht einfacher zu verstehen ist, weil sie $d^{bg}(A,C) + d^{bg}(C,B) = d^{bg}(A,C)$ in vielen Fällen erfüllt, nämlich wenn C zu einem minimalen Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,B}$ gehört. Bei allgemeinem X (also nicht unbedingt $X = \mathbb{E}$) müssen wir uns entscheiden, ob wir die Unterraummetrik auf $\mathcal{S}$ wollen oder die Bogenlängemetrik. Entscheidung: wir wollen für diesen Zweck die Bogenlängemetrik (mit einer gewissen Normierung, die noch erklärt wird). Grund: wir können diese Kreise $\mathcal{S}$ mit normierter Bogenlängemetrik d^{bg} gut verstehen. Sie sehen immer gleich aus (bis auf Isometrie), ganz unabhängig von X. Auf diese Weise finden wir, dass G_Q auch immer gleich aussieht (bis auf Isomorphismus), ganz unabhängig von X. Also ist G_Q isomorph zur Gruppe der orthogonalen 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen. Das sind Matrizen, bei denen die beiden Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bilden.

Sei $\mathcal{S}$ der Kreis vom Radius r um $Q \in X$. Wir wählen $C \in \mathcal{S}$ und dazu den gegenüberliegenden Punkt $C^* \in \mathcal{S}$. Das heisst, Q, C, C^* liegen auf einer einzigen Geraden, sind aber verschieden voneinander. Der Kreisumfang von $\mathcal{S}$ kann definiert werden als

$$2 \cdot \text{Bogenlänge von } \mathcal{T}_{C,C^*}.$$

Man muss sich fragen, ob das wohldefiniert ist. Wir haben gewählt: C (damit automatisch C^*) und eine Seite der Geraden durch C und Q. Wenn wir statt C einen anderen Punkt $D \in \mathcal{S}$ genommen hätten, und eine Seite der Geraden durch Q und D ausgewählt hätten, könnten wir sagen: Es gibt ja eine Isometrie von X nach X, die Q festlässt und C in D überführt, und die auch die ausgesuchte Seite von der Geraden durch Q, C in die ausgesuchte Seite von der Geraden durch Q, D überführt. Alles, was bei der Bestimmung des Kreisumfangs von $\mathcal{S}$ mit Wahl C, C^* usw. gebraucht wird, Polygone noch und noch, wird durch die Isometrie übersetzt und trägt so zur Bestimmung des Kreisumfangs von $\mathcal{S}$ mit Wahl D, D^* usw. bei, so dass sich in beiden Fällen dieselbe Zahl für den Kreisumfang ergibt.

Definition 9.4.2. Die *normierte Bogenlängemetrik* d^{bg} auf dem Kreis $\mathcal{S}$ ist definiert durch

$$d^{bg}(A,B) = 2\pi \, \frac{\text{Bogenlänge von } \mathcal{T}_{A,B}}{\text{Kreisumfang von } \mathcal{S}}$$

für beliebige $A, B \in \mathcal{S}$, wobei $\mathcal{T}_{A,B}$ ein minimaler Kreisbogen mit Endpunkten A und B ist.

Hier gibt es gleich wieder eine Frage betreffend *wohldefiniert*. Der minimale Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,B}$, der in der Definition von $d^{bg}(A,B)$ auftaucht, ist zweideutig wenn $B = A^*$. In diesem Fall müssen wir zeigen, dass beide Varianten von $\mathcal{T}_{A,B}$ dieselbe Bogenlänge haben. Aber das haben wir gerade gezeigt.

Die Zahl $d^{bg}(A,B)$ darf man gerne auffassen als das (Bogen-)Mass des *Winkels* (ohne Vorzeichen) bei Q von ΔQAB. Ich will hier aber besonders betonen (mehr als Iversen), dass wir dieses Winkelmass benutzen, um eine Metrik auf $\mathcal{S}$ zu basteln.

Statt jetzt zu zeigen, dass die normierte Bogenlängemetrik wirklich eine Metrik ist, nehmen wir eine Abkürzung. Sei $\mathcal{S}'$ der Einheitskreis in $\mathbb{E}$, der euklidischen Ebene. Auf $\mathcal{S}'$ haben wir auch die gewohnte Bogenlängemetrik (und sie ist schon normiert). In diesem Fall wissen wir ganz gut, dass es eine Metrik ist. Sie soll hier auch mit d^{bg} bezeichnet werden.

Proposition 9.4.3. *Es gibt eine Abbildung* $f\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ *mit der Eigenschaft*

$$d^{bg}(f(B), f(C)) = d^{bg}(B,C)$$

für alle $B, C \in \mathcal{S}$.

Beweis. Wir wählen ein festes $A \in \mathcal{S}$ und eine Seite der Geraden k durch Q und A, die wir hier die *obere Seite* von k nennen. (Sie ist eine Teilmenge von $X \setminus k$.) Für $B \in \mathcal{S}$ sei

$$\theta_B = \begin{cases} d^{bg}(A,B) & \text{wenn } B \in \text{(obere Seite von } k\text{) oder } B \in k, \\ -d^{bg}(A,B) & \text{wenn } B \in \text{(untere Seite von } k\text{)}. \end{cases}$$

Das ist unser Vorschlag für den Winkel (*mit Vorzeichen*!) bei Q von ΔQAB. Demnach setzen wir

$$f(B) = (\cos\theta_B, \sin\theta_B) \in \mathcal{S}'.$$

Eigenschaft $d^{bg}(f(B), f(C)) = d^{bg}(B,C)$: Wir behandeln drei Fälle, die einander nicht komplett ausschliessen, die aber jedenfalls alle Möglichkeiten ausschöpfen. *Erster Fall*: Wenn sowohl B als auch C zur Vereinigung von k und oberer Seite von k gehören, dann gehören sie zum minimalen Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,A^*}$, den wir hier als den oberen Halbkreis von $\mathcal{S}$ nehmen. In der Ordnung von $\mathcal{T}_{A,A^*}$ ist etwa $B \le C$ (oBdA). Dann haben wir $d^{bg}(B,C) = \theta_C - \theta_B$. Für $d^{bg}(f(B), f(C))$ finden wir genau dasselbe. *Zweiter Fall*: Sowohl B als auch C gehören zur Vereinigung von k und unterer Seite von k. Wir benutzen die Spiegelung σ_X an der Geraden k, und auch die entsprechende Spiegelung $\sigma_{\mathbb{E}}$ an der ersten Achse in $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} d^{bg}(f(B), f(C)) &= d^{bg}(\sigma_{\mathbb{E}}(f(B)), \sigma_{\mathbb{E}}(f(C))) \\ &= d^{bg}(f(\sigma_X(B)), f(\sigma_X(C))) \\ &= d^{bg}(\sigma_X(B), \sigma_X(C)) \qquad \text{(wegen Fall 1)} \\ &= d^{bg}(B,C). \end{aligned}$$

Dritter Fall: B gehört zur oberen Seite von k und C zur unteren Seite. Wir wählen einen minimalen Kreisbogen $\mathcal{T}_{B,C}$ (es gibt nur dann etwas zu wählen, wenn B, C, Q auf einer Geraden liegen). Weil B, C auf verschiedenen Seiten von k liegen, muss $[B,C] \cap [A, A^*] \neq \emptyset$ sein , so dass genau eins von A, A^* zu $\mathcal{T}_{B,C}$ gehört. Wenn $A \in \mathcal{T}_{B,C}$, dann haben wir

$$d^{bg}(B,C) = d^{bg}(B,A) + d^{bg}(A,C) = \theta_B - \theta_C$$

und daher auch $\theta_B - \theta_C \le \pi$. Für $d^{bg}(f(B), f(C))$ erhalten wir dasselbe, $\theta_B - \theta_C$, mit Benutzung von $\theta_B - \theta_C \le \pi$. Wenn dagegen $A^* \in \mathcal{T}_{B,C}$, dann haben wir

$$\begin{aligned} d^{bg}(B,C) &= d^{bg}(B,A^*) + d^{bg}(A^*,C) \\ &= (\pi - \theta_B) + (\pi + \theta_C) \\ &= 2\pi - (\theta_B - \theta_C) \end{aligned}$$

und daher auch $\theta_B - \theta_C \ge \pi$. Für $d^{bg}(f(B), f(C))$ erhalten wir dasselbe, $2\pi - (\theta_B - \theta_C)$, mit Benutzung von $\theta_B - \theta_C \ge \pi$. □

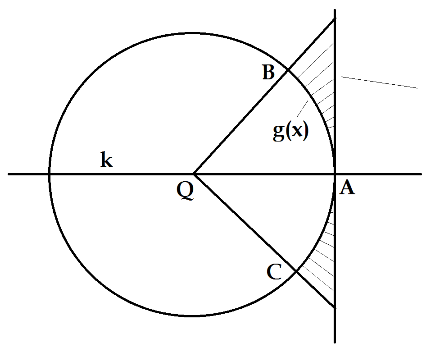
LEMMA 9.4.4. *Die Abbildung* $f: \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ *in Proposition 9.4.3 ist bijektiv. Deswegen ist* $d^{bg}: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ *eine Metrik auf* $\mathcal{S}$ *und* f *ist eine Isometrie von* $\mathcal{S}$ *nach* $\mathcal{S}'$.

Beweis. Injektiv: Wenn $B, C \in \mathcal{S}$ und $f(B) = f(C)$, dann ist

$$0 = d^{bg}(f(B), f(C)) = d^{bg}(B,C) \ge d_X(B,C) \cdot \text{Konst},$$

wobei mit Konst gemeint ist: 2π geteilt durch Kreisumfang von $\mathcal{S}$. Also ist $d_X(B,C) = 0$ und damit $B = C$.

Surjektiv: Man kann sofort sehen, dass gewisse Punkte von $\mathcal{S}'$ zu $\text{bild}(f)$ gehören, wie zum Beispiel $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ und $(0,-1)$. Andererseits können wir mit Bemerkung 9.3.4 zeigen, dass für jedes $D \in \text{bild}(f)$ auch ein Kreisbogen vom normierten Bogenmass $\pi/4$ (mit D in der Mitte des Bogens) in $\text{bild}(f)$ enthalten ist. (Das genügt dann.) Das wird jetzt vorgeführt im Fall $D = A$. Wegen Injektivität von f und Proposition 9.4.3 wissen wir schon, dass $d^{bg}: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ eine Metrik ist und dass $f: \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ abstandserhaltend ist. Damit ist f auch stetig. In Lemma 9.3.3 und Bemerkung 9.3.4 haben wir eine Bijektion g konstruiert von einem Intervall auf den minimalen Kreisbogen $\mathcal{T}_{B,C}$, wobei $d^{bg}(A,B) = d^{bg}(A,C) = \pi/4$ und $d^{bg}(B,C) = \pi/2$.



Diese Bijektion g ist stetig, weil sie für beliebige P_1, P_2 im Intervall erfüllt

$$d^{bg}(g(P_1), g(P_2)) = \text{Konst} \cdot \text{Bogenlg von } \mathcal{T}_{g(P_1),g(P_2)} \leq \text{Konst} \cdot d(P_1, P_2)$$

wegen Lemma 9.3.3, mit Konst wie oben. Ausserdem ist bild$(f \circ g)$ enthalten im minimalen Kreisbogen von $\mathcal{S}'$ mit Endpunkten $f(B)$ und $f(C)$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt jetzt, dass $f \circ g$ surjektiv ist als Abbildung von Intervall nach diesem Kreisbogen von $\mathcal{S}'$. Damit ist jedenfalls dieser Kreisbogen in bild(f) enthalten, wie gezeigt werden sollte. □

KOROLLAR 9.4.5. *Sei* $G = \mathrm{isom}(X)$ *und* G_Q *die Standgruppe von* $Q \in X$ *für die übliche Wirkung von* G *auf* X. *Dann ist* G_Q *isomorph zu* $O(2)$ *(Gruppe der orthogonalen* 2×2*-Matrizen).*

Beweis. Geht ungefähr so:

(1) Weil G_Q auf $\mathcal{S}$ wirkt (Einschränkung der üblichen Wirkung von G auf X), erhalten wir einen Homomorphismus $\Phi: G_Q \to \mathrm{isom}(\mathcal{S})$, wobei $\mathrm{isom}(\mathcal{S})$ die Gruppe der Isometrien von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ ist. Dabei ist $\mathcal{S}$ mit der normierten Bogenlängemetrik ausgestattet.
(2) Dieser Homomorphismus ist ein Isomorphismus.
(3) Wegen Lemma 9.4.4 ist aber $\mathrm{isom}(\mathcal{S})$ isomorph zu $\mathrm{isom}(\mathcal{S}')$, Isometriegruppe vom Einheitskreis $\mathcal{S}' \subset \mathbb{E}$ mit der Bogenlängemetrik.
(4) Ausserdem ist natürlich $\mathrm{isom}(\mathcal{S}')$ isomorph zu $O(2)$.

Das ist alles leicht zu zeigen. Bemerkung zu (1): wir haben hier, wie schon gesagt, die Wahl zwischen Unterraummetrik auf $\mathcal{S}$ und normierter Bogenlängemetrik, aber wir nehmen die normierte Bogenlängemetrik. Man muss sich überzeugen, dass die Einschränkung einer Isometrie $\tau: X \to X$ mit $\tau(Q) = Q$ auf den Kreis $\mathcal{S}$ eine Isometrie $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist für die normierte Bogenlängemetrik. Bemerkung zu (3): eine Isometrie $f: \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ (für die normierten Bogenlängemetriken) bestimmt einen Isomorphismus von Gruppen

$$\psi_f: \mathrm{isom}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathrm{isom}(\mathcal{S}')$$

durch $\Psi_f(g) = f \circ g \circ f^{-1}$ für $g \in \mathrm{isom}(\mathcal{S})$. (Überprüfen: Ψ_f ist eine Abbildung von $\mathrm{isom}(\mathcal{S})$ nach $\mathrm{isom}(\mathcal{S}')$, ist ein Homomorphismus, ist bijektiv.) Bemerkung zu (2): Man sollte sich erst um die Injektivität kümmern. Wir zeigen also, dass $\ker(\Phi)$ nur ein Element hat. Sei $\tau\colon X \to X$ eine Isometrie, die Q festlässt und jeden Punkt von $\mathcal{S}$ festlässt. Dann ist $\tau = \mathrm{id}$ wegen Korollar 9.1.3. Fertig. Surjektivität: Es genügt, zu zeigen, dass $\Psi_f \circ \Phi$ (ein Homomorphismus von G_Q nach $\mathrm{isom}(\mathcal{S}')$) surjektiv ist. Jedes Element in $\mathrm{isom}(\mathcal{S}')$ kann als Zusammensetzung von höchstens zwei Geradenspiegelungen geschrieben werden (Spezialfall von Korollar 9.1.3; Spiegelungen an Geraden in $\mathbb{E}$, die den Nullpunkt enthalten). Also genügt es, zu zeigen, dass jede dieser Geradenspiegelungen zum Bild von $\Psi_f \circ \Phi$ gehört. Das ist eigentlich klar. Eine Gerade ℓ in $\mathbb{E}$ durch den Nullpunkt hat zwei Schnittpunkte A', B' mit $\mathcal{S}'$. Dann sind $f^{-1}(A') =: A$ und $f^{-1}(B') =: B$ zwei verschiedene Elemente von $\mathcal{S}$, die auf einer Geraden k mit dem Zentrum Q liegen. Dann ist $\Psi_f(\Phi(\sigma_k)) = \sigma_\ell$, wobei $\sigma_k\colon X \to X$ die Spiegelung an der Geraden k bezeichnet und $\sigma_\ell\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ die Spiegelung an der Geraden ℓ. □

9.5. Übungsaufgaben

In Aufgabe 1 von diesem Übungsblatt versuche ich, folgende Aussage anzudeuten. Die Winkel, die wir uns in Vorlesungsnotizen Woche 9 und 10 so mühsam erarbeitet haben (Definition 9.4.2 und Bemerkung zu Winkeln kurz danach) sind im Falle von $X = \mathbb{H}$ genau die Winkel, die wir mit unseren Euklidisch geschulten Augen sehen.

Aufgabe 9.5.1. Wir schreiben Q für das Element i von $\mathbb{H}$.
a) Man bestimme die Untergruppe der Isometriegruppe von $\mathbb{H}$ bestehend aus allen Isometrien, die Q festhalten. (Siehe Aufgabe 5.4.1 und Beispiele 7.1.14, 9.1.4.)
b) In dieser Untergruppe soll ein Element ψ gefunden werden, das $\psi^{100} = 1$ erfüllt (wobei 1 dasselbe wie id bedeutet), aber $\psi^k \neq 1$ für $k = 1, 2, 3, \ldots, 99$. (*Vorsicht*: $\psi^{50} \neq 1$ wird auch verlangt.)
c) Sei $\mathcal{S}$ der Kreis vom Radius r um Q wie in Bemerkung 9.4.1. Für beliebiges $A \in \mathcal{S}$ und $B = \psi(A) \in \mathcal{S}$ soll die normierte Bogenlänge vom minimalen Kreisbogen $\mathcal{T}_{A,B} \subset \mathcal{S}$ bestimmt werden.[2] [3]
d) Wir wissen (Abschnitte 5.3 und 5.4), dass das Dreieck $\Delta QAB = \Delta_{\mathbb{H}} QAB$ (im Sinne der hyperbolischen Metrik) Seiten hat, die im Sinn der euklidischen Metrik von $\mathbb{R}^2$ Kreisbögen sind oder Segmente (letzteres nur, wenn vertikal). Wir können dann versuchen, den Winkel von $\Delta_{\mathbb{H}} QAB$ bei Q im euklidischen Sinn zu bestimmen.[3]
e) Haben Sie dieselbe Antwort in c) und d)? Dann ist es gut.

Aufgabe 9.5.2. Sei S^1 der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$, jetzt aber mit Bogenlängemetrik ausgestattet. (Also: Abstand zwischen $(1,0)$ und $(0,1)$ ist $\pi/2$, Abstand zwischen $(1,0)$ und

[2] Hier geht es eigentlich nicht um ein Berechnen, sondern um ein Bedenken. Die Antwort hängt zwar von Ihrer Wahl von ψ ab. Es gibt aber so etwas wie eine Standardwahl, die Sie wahrscheinlich getroffen haben, wenn Sie nichts Böses im Sinne hatten.

[3] Wie macht man das? Theoretisch so: Hyperbolische Gerade k durch Q und A parametrisieren, etwa mit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, differenzierbar, $\mathrm{bild}(f) = k$, $f(0) = Q$, $f'(0) \neq$ Nullvektor. Das f muss nicht abstandserhaltend sein. Ebenso hyperbolische Gerade ℓ durch Q und B parametrisieren, etwa mit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{H}$, differenzierbar, $\mathrm{bild}(g) = \ell$, $g(0) = Q$, $g'(0) \neq$ Nullvektor. Das g muss nicht abstandserhaltend sein. Dann wird gefragt: was ist der (euklidische) Winkel zwischen den Vektoren $f'(0)$ und $g'(0)$? Bogenmass bitte. Sie müssen aber nicht den ganzen Zirkus wirklich veranstalten, um die Antwort zu finden.

$(-1, 0)$ ist π, usw.) Jede orthogonale Matrix

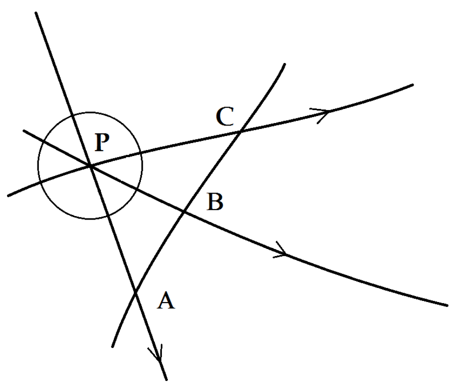
$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

bestimmt eine Bijektion $S^1 \to S^1$ in der üblichen Weise (Multiplikation von Matrix mit Einheitsvektor). Dabei bedeutet *orthogonale Matrix*, dass a, b, c, d reelle Zahlen sind, $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$ und $ac + bd = 0$, kurz gesagt, die Spalten der Matrix bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$). Diese Bijektion bestimmt von M ist auch eine Isometrie. — Es soll gezeigt werden, dass es keine anderen Isometrien von S^1 nach S^1 gibt (mit dieser Metrik).

9.6. Noch mehr Übungsaufgaben

Der metrische Raum X soll Axiome I und II erfüllen.

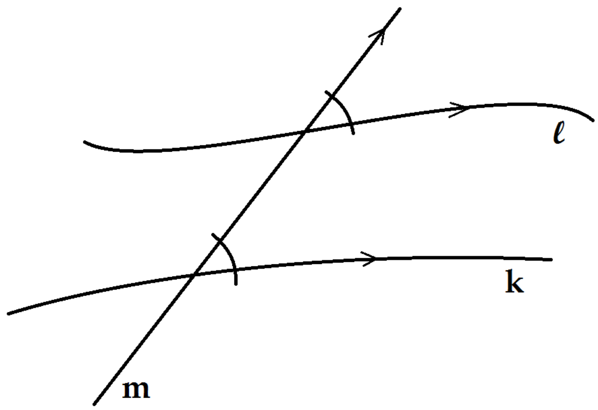
Aufgabe 9.6.1. Zeigen: In der Situation vom Bild



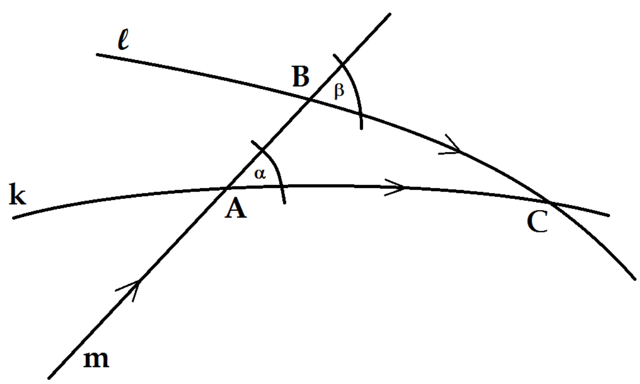
ist der Winkel zwischen $[P, A]$ und $[P, B]$ kleiner als der Winkel zwischen $[P, A]$ und $[P, C]$. (Die *Situation* ist: drei verschiedene Geraden durch einen Punkt P von X, die eine vierte Gerade in drei verschiedenen Punkten A, B, C schneiden, wobei $B \in [A, C]$. Die drei Geraden durch P sind orientiert wie angedeutet, von P nach A bzw B bzw C. — Sieht so aus, als ob es klar ist, aber wie sagt man es? Kleinen Kreis um P machen wie angedeutet. Die Schnittpunkte von den drei Geraden durch P mit dem kleinen Kreis brauchen Namen. Dann vielleicht Definition 9.2.4 und Lemma 9.2.5 benutzen.)

Aufgabe 9.6.2. Sei k eine Gerade in X und $\tau: X \to X$ eine Punktspiegelung. Dann ist Gerade k parallel zu Gerade $\tau(k)$. (*Hinweis*: In den Vorlesungsnotizen ist etwas dazu angedeutet. Bessere Methode: gemeinsame Senkrechte finden.)

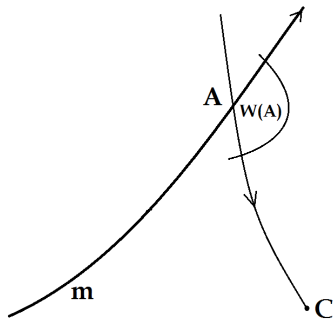
Aufgabe 9.6.3. Zwei orientierte Geraden k und ℓ in X, die eine orientierte Gerade m schneiden und denselben Winkel am Schnittpunkt machen, sind parallel. Siehe Bild. (*Hinweis:* Aufgabe 9.6.2 benutzen.)



Aufgabe 9.6.4. Orientierte Geraden k, ℓ schneiden eine orientierte Gerade m wie im Bild (in den Punkten A bzw. B), sind aber nicht parallel, sondern haben einen Schnittpunkt C, wobei $A < C$ in k und $B < C$ in ℓ, im Sinne der Orientierungen. Für die Winkel bei A und B (siehe Bild) soll gezeigt werden: $\alpha < \beta$. (*Hinweis:* Kleinen Kreis vom Radius r um B machen. Sei h die orientierte Gerade durch B, die Winkel α mit m macht. Aufgabe 9.6.3 benutzen. Die Schnittpunkte von h, ℓ, m mit dem kleinen Kreis brauchen Namen. Wieder 9.2.4 und Lemma 9.2.5.)



Aufgabe 9.6.5. Gegeben orientierte Gerade m und $C \in X \setminus m$. Eine Abbildung W von m nach Intervall $(0, \pi)$ ist wie folgt definiert. Für $A \in m$ ist $W(A)$ der Winkel zwischen m und der Geraden durch A und C (wobei Letztere so orientiert, dass $A < C$). Aufgabe 9.6.4 zeigt: diese Abbildung ist strikt monoton (wachsend), daher auch injektiv. Hier soll gezeigt werden: sie ist surjektiv. (*Hinweis:* Proposition 6.8.3 benutzen.)


A
W(A)
m
C

CHAPTER 10

Nicht-euklidische Geometrien

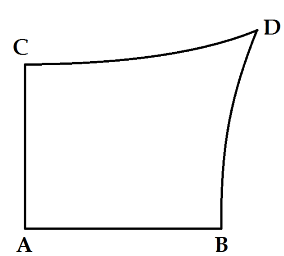
Hier geht es meistens um einen metrischen Raum X, der die Axiome I und II erfüllt, aber Axiom III verletzt. Wir legen es darauf an, die Isometriegruppe $G = \mathrm{isom}(X)$ zu verstehen, um X zu verstehen. Um G insgesamt zu verstehen, versuchen wir, gewisse Untergruppen zu verstehen, die mit gewissen geometrischen Objekten in X assoziiert sind. Diese geometrischen Objekte können etwa Kreise und Geraden sein.

Dieser Plan ist noch nicht durchgeführt. Also gibt es hier nur ein paar Ansätze. Mehr natürlich bei Iversen, aber ich finde, dass die letzten Kapitel bei Iversen sehr kompliziert sind. Ich würde es eben gerne einfacher darstellen durch stärkere Betonung von Gruppen.

10.1. Winkelsumme in Dreiecken

Wir nehmen erstmal an, dass X die Axiome I und II erfüllt (keine Vorgabe betreffend Axiom III).

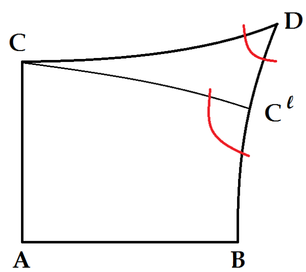
Proposition 10.1.1. *Gegeben Lambert-Viereck* $\square ABCD$ *wie im Bild, also: rechte Winkel bei* A, B, C*. Dann ist der Winkel bei* D *nicht grösser als* $\pi/2$*.*



Beweis. Sei k die Gerade durch A und C und sei ℓ die Gerade durch B und D. Wegen Saccheri-Ungleichung ist

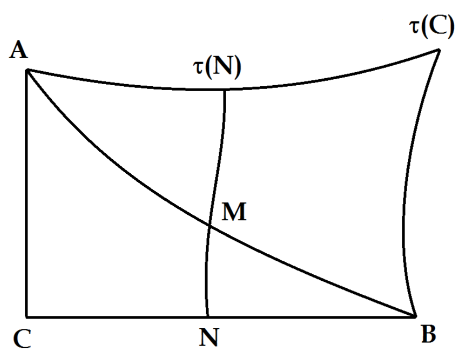
$$d(B, D) \geq d(B^k, D^k) = d(A, C) \geq d(A^\ell, C^\ell) = d(B, C^\ell).$$

Wenn $C^\ell = D$, dann sind wir fertig (rechter Winkel bei D). Sonst folgt aus $d(B, D) \geq d(B, C^\ell)$, dass $D \notin [B, C^\ell]$; in Worten, C^ℓ liegt unterhalb von D im Sinne des Bildes. Aufgabe 9.6.4 sollte zeigen, dass der im Bild unten eingezeichnete Winkel von $[C, C^\ell]$ mit ℓ mindestens so gross ist wie der Winkel von $[C, D]$ mit ℓ. Aber der Winkel von $[C, C^\ell]$ mit ℓ ist ja $\pi/2$. $\square$



THEOREM 10.1.2. *In jedem Dreieck* ΔABC *in* X *ist die Winkelsumme* $\leq \pi$.

Schritt 1 vom Beweis. Zurückführen auf den Fall eines rechtwinkligen Dreiecks. OBdA ist $d(A,B) \geq d(B,C)$ und $d(A,B) \geq d(A,C)$. Sei k die Gerade durch A und B. Die Senkrechte n zu k durch C (auch genannt eine Höhe des Dreiecks, wenn ich mich nicht irre) zerteilt das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke, ΔAC^kC und ΔC^kBC. Die Winkelsumme des ursprünglichen Dreiecks ist gleich Winkelsumme der beiden kleinen Dreiecke zusammengenommen, minus π.
Schritt 2. Fall eines rechtwinkligen Dreiecks zurückführen auf Prop 10.1.1. Wir nehmen das rechtwinklige Dreieck ΔABC, rechter Winkel bei C, und machen eine Punktspiegelung τ am Mittelpunkt M von $[A,B]$. Sei N die senkrechte Projektion von M auf die Gerade durch B und C. Dann liegen $M, N, \tau(N)$ auf einer Geraden. Jetzt ist $\square CN\tau(N)A$ ein Lambert-Viereck. □



THEOREM 10.1.3. *Wenn* X *das Axiom III verletzt, dann ist in jedem Dreieck* ΔABC *in* X *die Winkelsumme* $< \pi$.

Beweis. Angenommen, das ist falsch für ein gewisses Dreieck; dann ist die Winkelsumme in diesem Dreieck genau π wegen Theorem 10.1.2. Dieses Dreieck können wir dann wieder in zwei rechtwinklige aufteilen, von denen jedes Winkelsumme π haben muss. Aus einem dieser rechtwinkligen Dreiecke mit Winkelsumme π können wir dann durch Punktspiegelung am Mittelpunkt der Hypotenuse (der Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt) ein waschechtes Rechteck bauen, also ein Viereck mit 4 rechten Winkeln. Ich habe die Ecken dieses Vierecks jetzt A, B, C, D genannt (ohne Rücksicht darauf, was A, B, C vorher bedeutet haben). Durch wiederholte Geradenspiegelungen and den Seiten dieses Rechtecks erhalten wir ein Gitter von Geraden wie die schwarzen Geraden im Bild unten; man könnte von Vertikalen und Horizontalen reden. Jedenfalls sind alle Schnittwinkel zwischen diesen Geraden rechte Winkel.

Jetzt benutzen wir die Annahme, dass Axiom III verletzt ist. Dann gibt es einen Punkt $P \in X \setminus k$, durch den mehrere Geraden gehen, die parallel zur Geraden k durch A und B sind. Dieser Punkt P liegt auf irgendeiner Geraden ℓ, die k senkrecht trifft; nach Anwendung einer Isometrie können wir annehmen, dass ℓ die Gerade durch A und D ist und dass P sich auf der richtigen Seite von k befindet, wie im Bild unten angedeutet. Eine von den Geraden durch P, die parallel zu k sind, ist immer die Senkrechte durch P zu ℓ. Die interessiert uns aber nicht so, deswegen habe ich eine andere Gerade durch P in Blau und schräg eingezeichnet. Die soll also parallel zu k sein, aber *nicht* senkrecht zu ℓ. Die rote schräge Gerade darüber ist dadurch bestimmt, dass sie denselben Winkel mit ℓ macht wie die blaue, also keinen rechten Winkel, aber durch Q geht (wobei Q einer der Gitterpunkte ist). Sie ist dann auch parallel zu k (Aufgabe 9.6.3).

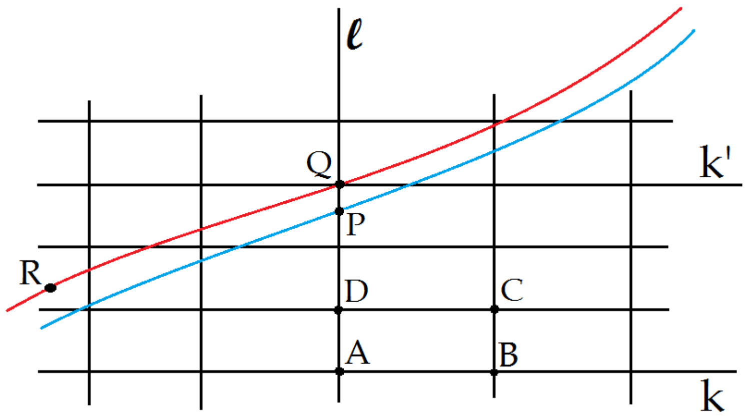
Jetzt haben wir einen Widerspruch. Denn nach Proposition 6.8.3 muss für Punkte R in der roten Geraden genügend weit weg von Q der minimale Abstand zur (horizontal gezeichneten) Geraden k' durch Q beliebig gross werden. Wir sehen aber, dass er (falls R auch noch zur linken Seite von ℓ gehört[1]) nicht grösser werden kann als

$$d(A, Q) + d(A, B).$$

(Denn so ein R liegt in einem der kleinen Rechtecke[2] zwischen den Geraden k und k', dessen Ecken wir etwa A', B', C', D' nennen können. Wenn wir das Segment $[D', R]$ verlängern bis zum nächsten Schnittpunkt R' mit dem Rechteckrand, dann ergibt sich $d(D', R) \leq d(D', R') \leq d(A, D) + d(A, B)$. Ausserdem ist der Abstand von D' zum nächstgelegenen Punkt auf der Geraden k' höchstens $d(A, Q) - d(A, D)$.) $\square$

[1] Nicht vergessen: Eine Seite von ℓ ist eine spezielle Teilmenge von $X \setminus \ell$.

[2] Man kann stundenlang darüber nachdenken, was das eigentlich heissen soll! Es soll wahrscheinlich heissen: R ist rechts von der Geraden durch A' und D' oder auf dieser Geraden; links von der Geraden durch B' und C' oder auf dieser Geraden; oberhalb von der Geraden durch A' und B' oder auf dieser Geraden; unterhalb von der Geraden durch D' und C' oder auf dieser Geraden. Dann kann man sich noch überlegen, was *rechts, links, oberhalb, unterhalb* bedeuten soll. Diese Worte bezeichnen gewisse Seiten von gewissen Geraden. Ebenso: *zwischen* k und k' sind alle Punkte von X, die entweder zu $k \cup k'$ gehören oder oberhalb von k und unterhalb von k' sind ... wobei *oberhalb von* k eine Seite von k bezeichnet und *unterhalb von* k' eine Seite von k'.



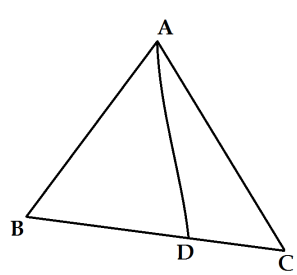
Bemerkung 10.1.4. (Iversen, I.9.10 und I.9.11.) Für ein Dreieck ΔABC mit Winkeln α, β, γ ist die Zahl

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

der *Winkeldefekt* vom Dreieck; Bezeichnung $\mathrm{dfk}(\Delta ABC)$ oder ähnlich. Der Winkeldefekt hat folgende Eigenschaft: Wenn ein Dreieck ΔABC unterteilt ist in Dreiecke ΔABD und ΔADC, wie im Bild unten, dann ist

$$\mathrm{dfk}(\Delta ABC) = \mathrm{dfk}(\Delta ABD) + \mathrm{dfk}(\Delta ADC).$$

Diese Formel erinnert an *Fläche* (Areal). Im Fall einer euklidischen Geometrie (Axiome I,II,III erfüllt) ist das nicht weiter interessant, denn $\mathrm{dfk}(\Delta ABC)$ ist ja dann immer gleich Null. Wenn aber Axiom III verletzt ist, dann ist $\mathrm{dfk}(\Delta ABC)$ immer strikt positiv, wie wir gerade bewiesen haben. Dann kann man diesen Gedanken *Defekt ist so etwas wie Fläche/Areal* rechtfertigen. Genauer, die Fläche von ΔABC kann mit $c \cdot \mathrm{dfk}(\Delta ABC)$ gleichgesetzt werden für eine gewisse positive Konstante $c \in \mathbb{R}$, die nur von X abhängt, nicht von ΔABC in X. Das hat die seltsame Konsequenz, dass die Fläche eines ganz beliebigen Dreiecks in X immer $< c \cdot \pi$ ist, denn der Winkeldefekt ist (natürlich) immer kleiner als π. Saccheri wusste das übrigens. Es war wohl eine der Folgerungen aus der Negation von Axiom III, die er einfach zu absurd fand, um sich weiter nach Beispielen (von metrischen Räumen, die Axiom I und II erfüllen, aber Axiom III verletzen) umzusehen.



10.2. Senkrechte Projektion im nicht-euklidischen Fall

Hier wird angenommen, dass X die Axiome I und II erfüllt, aber III verletzt. Dann haben wir Theorem 10.1.3 zur Verfügung, und das ist auch das wichtigste Hilfsmittel im Beweis von folgendem Lemma.

LEMMA 10.2.1. *Gegeben Geraden* k *und* h *in* X*, die einander schneiden. Sei* $\mathsf{p_k}:\mathsf{X}\to\mathsf{k}$ *die senkrechte Projektion auf* k*. Dann ist* $\mathsf{p_k(h)}$ *entweder ein Punkt oder ein* beschränktes *offenes Intervall in* k*.*

Beweis: Iversen III.5.1. Hübsch. Dazu auch Lemma 6.8.2. Das zeigt sofort, dass $\mathsf{p_k(h)}$ entweder ein Punkt ist (Fall $\mathsf{h}\perp\mathsf{k}$) oder ein offenes Intervall. Ich glaube, Iversen setzt das voraus und konzentriert sich darauf, zu beweisen, dass das Intervall beschränkt ist. □

Bemerken: Im euklidischen Fall ($\mathsf{X}=\mathbb{E}$) ist $\mathsf{p_k(h)}$ entweder ein Punkt (wenn h senkrecht zu k ist) oder ganz k, also in den meisten Fällen *nicht* beschränkt.