30.01.2019

Vorläufiger Plan für das ZFB-Seminar "Nicht-Euklidische Geometrie" Sommersemester 2019 (M. Weiss)

Kurzbezeichungen für Literatur: [Iv] für das Iversen-Buch, [We] für meine eigenen Vorlesungsnotizen von 2015. Ein entscheidender Unterschied zwischen [We] und [Iv] ist, dass die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}$ als wichtiges Beipiel eines metrischen Raumes bei [We] früh vorgestellt wird, bei [Iv] dagegen erst ganz zuletzt.

Vortragstitel.

(1) *Metrische Räume und abstandserhaltende Abbildungen zwischen solchen.* Hier sollten Beispiele besonders betont werden. Besonders wichtig sind im Hinblick auf das Inzidenzaxiom (Axiom I) der euklidischen Geometrie nach [Iv] die abstandserhaltenden Abbildungen von $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik in andere metrische Räume. Dazu Abschnitt I.1 von [Iv]. Ungleichung I.1.7. ist wichtig. Kapitel 1 von [We] gehört sowieso dazu.

(2) *Die drei Axiome von Euklid* in der Fassung von [Iv] oder [We]. Kapitel 2 von [We] und Abschnitte I.1, I.2, sowie II.1 von [Iv]. Vorsicht: geringfügige Unterschiede zwischen [Iv] und [We]. Zu diesem Vortrag soll auch der Nachweis gehören, dass die euklidische Ebene (als metrischer Raum mit der üblichen Metrik) die drei Axiome erfüllt.

(3) *Konstruktion von Metriken auf offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit Hilfe von Gewichtsfunktionen.* Das ist Kapitel 3 von [We]. Der Titel sagt schon vieles. Eigentlich ist das ein Anfang, der in Richtung "Riemannsche Geometrie" oder "Differentialgeometrie" geht, und die/der Vortragende könnte das auch ein bisschen weiter verfolgen. Wichtige Begriffe: Kurvenlänge, gewichtete Kurvenlänge bei Gewichtsfunktion Φ.

(4) *Die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}$ und ihre Selbst-Isometrien.* Das ist Kapitel 4 von [We]. Eine ganze Menge Inhalt, aber auch sehr interessant. Die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}$ ist die obere Halb-Ebene von $\mathbb{R}^2$ (oder $\mathbb{C}$) ohne die horizontale Achse, ausgestattet mit einer besonderen Metrik, die nach dem Rezept von Vortrag 3 konstruiert wird. Deswegen sind Abstandsbestimmungen in dieser Metrik auf den ersten Blick nicht leicht. Es geht aber doch irgendwie. Dabei wird es wichtig, dass wir eine reiche Auswahl an Selbst-Isometrien von $\mathbb{H}$ zur Verfügung haben. Eine Vertrautheit mit komplexen Zahlen wird es für die/den Vortragende(n) leichter machen.

(5) *Die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}$ erfüllt die Axiome I and II und verletzt Axiom III.* Das ist Kapitel 5 von [We]. Historisch gesehen wichtig, weil damit gezeigt ist, dass die Axiome I und II ohne III nicht ausreichen, um die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ als metrischen Raum zu charakterisieren. Schliesst an den Vortrag 5 and und benutzt ähnliche Begriffe. Der Titel sagt schon vieles.

(6) *Geometrische Konstruktionen und Abschätzungen.* Kapitel 6 von [We] und Vieles aus Teil I von [Iv]. Hier geht es um Konstruktionen, die man möglicherweise aus der Schule kennt oder zu kennen glaubt, wie Lot fällen oder Mittelsenkrechte konstruieren oder Parallele zu einer Geraden durch einen Punkt konstruieren. Es wird meistens vorausgesetzt, dass der metrische Raum X, in dem wir diese Konstruktionen ausprobieren, die Axiome I und II erfüllt, aber nicht unbedingt Axiom III. (Das Axiom I sichert, dass wir einigermassen von *Geraden* in X sprechen können.) Wichtig sind aber auch gewisse Ungleichungen, besonders Saccheris Ungleichung: Projektion auf eine Gerade vergrössert niemals die Abstände.

(7) *Abstrakte Theorie von Gruppen und Wirkungen.* Kapitel 7 und 8 von [We], vielleicht auch noch Abschnitt 9.1. Dieser Vortrag ist in vieler Hinsicht unabhängig von den Vorhergehenden. Man kann sagen, dass es um eine abstrakte Theorie von *Symmetrien* geht. Allerdings

haben wir gewisse Beispiele vor Augen: die Selbst-Isometrien von $\mathbb{H}$ bilden zum Beispiel eine Gruppe, und das, was sie mit den Punkten von $\mathbb{H}$ anstellen, beschreibt eine Wirkung dieser Gruppe auf der Menge $\mathbb{H}$. Das wird auch in Abschnitt 9.1 von [We] beleuchtet. Für Studierende, die schon die Vorlesung über Gruppen bei J Ebert gehört haben, wäre dieser Vortrag wahrscheinlich leicht(er). Trotzdem ist da eine ganze Menge Inhalt.

(8) *Die Axiome I, II und III charakterisieren die euklidische Ebene.* Kapitel 10 von [We]. Genauer bedeutet das: wenn ein metrischer Raum X die Axiome I, II und III erfüllt, dann gibt es eine Isometrie von X nach $\mathbb{R}^2$ (wobei $\mathbb{R}^2$ wieder mit der Standard-Metrik ausgerüstet ist). Das ist eine wichtig Ergänzung zu dem, was schon aus Vortrag 2 wissen, nämlich dass $\mathbb{R}^2$ mit der Standard-Metrik die drei Axiome erfüllt. Ausserdem ist auch der Zusammenhang mit Vortrag 5 wichtig, denn dort haben wir erfahren, dass die Axiome I und II ohne III die euklidische Ebene *nicht* charakterisieren.

Mit diesen Vorträgen sollten wir einen vorläufigen Abschluss erreicht haben. Da ist aber noch eine grosse Herausforderung. Man möchte zeigen, dass ein metrischer Raum, der die Axiome I und II erfüllt, aber Axiom III verletzt, eine Isometrie nach $\mathbb{H}$ (mit der hyperbolischen Metrik) besitzt, bis auf einen Streckungsfaktor (eine feste positive reelle Zahl). Da wir wahrscheinlich nicht mehr als 8 studentische Teilnehmer haben, müssen wir das nicht unbedingt versuchen. Andererseits haben wir mehr Themenauswahl, wenn wir es versuchen. Also noch zwei Titel.

(9) *Winkelmessung in einem metrischen Raum, der die Axiome I und II erfüllt, aber nicht unbedingt Axiom III.* Kapitel 9 von [We] ohne Abschnitt 9.1. Der Titel sagt vieles. Es ist mühsame Kleinarbeit. Ich bin noch nicht sehr zufrieden mit diesem Kapitel, obwohl es sich eng an [Iv] hält. Ich habe den Verdacht, dass man es besser machen kann.

(10) *Winkelsumme in Dreiecken.* Kapitel 11 von [We]. Hier geht es in erster Linie um metrische Räume, die die Axiome I und II erfüllen, aber III verletzen. Es stellt sich dann zum Beispiel heraus, dass die Winkelsumme in Dreiecken immer $< \pi$ ist (gemessen in rad).

Weiter möchte ich noch nicht planen, da bei den letzten Kapiteln von [We] noch etwas unklar ist, wohin die Reise gehen soll. Bei [Iv] ist das vielleicht klarer, dafür ist es aber auch furchteinflössend.

Themenvorschläge für Bachelorarbeiten im Anschluss an dieses Seminar.

- *Die Isometriegruppe von $\mathbb{H} = \mathbb{H}^2$ und ihre diskreten Untergruppen.* Um den Titel zu verstehen, muss man verstehen, was *diskret* bedeutet. Wenn wir uns die Elemente der Isometriegruppe von $\mathbb{H}$ als invertierbare 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen vorstellen, was wir nach Vortrag 4 einigermassen können, dann können wir auch einigermassen von Abständen zwischen diesen Elementen sprechen. Dann bedeutet *diskret*, dass das neutrale Element der Untergruppe von allen anderen Elementen der Untergruppe einen Abstand $> \varepsilon$ hat für ein festes $\varepsilon > 0$.
- *Die Isometriegruppe von $\mathbb{H}^3$ und ihre diskreten Untergruppen.* Der hyperbolische Raum $\mathbb{H}^3$ ist eine 3-dimensionale Variante von $\mathbb{H} = \mathbb{H}^2$, und es handelt sich auch wieder um einen metrischen Raum. Seine Isometriegruppe kann man ungefähr so beschreiben wie die von $\mathbb{H}^2$. (Isometrien von $\mathbb{H}^2$ können als invertierbare 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen beschrieben werden; Isometrien von $\mathbb{H}^3$ können als invertierbare 2×2-Matrizen mit komplexen Einträgen beschrieben werden.)
- *Kombinatorische Theorie von projektiven Ebenen.* Das hält sich nicht sehr eng an die Seminarthemen, obwohl es so klingt. Hier geht es um eine andere Axiomatik für ebene Geometrie, bei der es zwar Punkte und Geraden gibt, aber keine Metrik. Der Mathematiker David Hilbert hat sich besonders mit diesem Thema beschäftigt. Er hat geometrische Bedingungen

betont, die zur Folge haben, dass man so eine projektive Ebene *algebraisch* beschreiben, das heisst mit *Koordinaten* versehen kann.

- *Charakterisierung der hyperbolischen Ebene* $\mathbb{H}$ *durch die Axiome I und II, bis auf Streckungsfaktor.* Hier würde es um die letzten Kapitel von [Iv] oder die fehlenden Kapitel von [We] gehen. Ein schwieriges Thema. Wahrscheinlich wäre viel Betreuung nötig.