17.01.2019

Nicht-Euklidische Geometrie
ZFB-Seminar Sommersemester 2019
M. Weiss

Thema. Man kann an vielen Stellen nachlesen, dass die Entdeckung der nicht-Euklidischen Geometrie im 19. Jahrhundert ein grosser Schritt vorwärts war für die abendländische Kultur, usw. usw.. Ausserdem versteht man dabei wenigstens, dass es ein verspäteter Triumph war für Euklid. Dieser hatte nämlich in seiner Axiomatisierung der ebenen Geometrie ein spezielles Axiom formuliert, das Parallelenaxiom, das in den folgenden etwa 2000 Jahren viele Leute irritierte, weil sie es kompliziert fanden und für überflüssig hielten. Das Beispiel der nicht-Euklidischen Geometrie zeigt aber, dass das Parallelenaxiom nicht überflüssig ist. Grossartig, Euklid! Aber worum ging es da eigentlich? Die Bekämpfer und Verteidiger des Parallelenaxioms wussten das vielleicht ganz gut, aber wenn man heute verschiedene Experten oder Bücher befragt, darf man auf viele verschiedene Antworten gefasst sein. Ich bin sehr beeindruckt von einer Expertenantwort, die ich in einem kleinen Buch von B Iversen gefunden habe. Iversen fängt mit dem Begriff *metrischer Raum* an. (Ein metrischer Raum ist eine Menge ausgerüstet mit einer Funktion, die für je zwei Elemente der Menge angibt, was ihr Abstand sein soll; natürlich sollen gewisse Bedingungen erfüllt sein.) Er fasst die Axiome von Euklid als ziemlich erfolgreichen Versuch einer Charakterisierung von einem ganz speziellen metrischen Raum auf, nämlich der Euklidischen Ebene. In dieser Formulierung gibt es nur noch drei Axiome, und die Frage ist, was passiert, wenn man das dritte weglässt. Es stellt sich heraus, dass es ausser der Euklidischen Ebene im wesentlichen noch *genau einen* anderen metrischen Raum gibt, der die übrigen zwei Axiome erfüllt; das ist die *nicht-Euklidische Ebene*.

Wenn man das verstehen will, so wie es bei Iversen erklärt ist, muss man sich eine ganze Weile mit metrischen Räumen herumschlagen, über die man ziemlich wenig weiss — zu Anfang nur, dass sie zwei der drei Axiome von Euklid/Iversen erfüllen. Dafür hat man dann eine Chance, zu verstehen, wie die nicht-Euklidische Geometrie gefunden wurde und was an ihr so einzigartig ist. Also, der Weg ist das Ziel. Viel Arbeiten mit Ungleichungen, wenig Erholung mit Gleichungen. Das ist auch die Tradition von Saccheri, 1667-1733, wie Iversen betont. Ausserdem sind Symmetrieargumente immer sehr hilfreich. Das hat zur Folge, dass ausser dem Begriff *Metrischer Raum* auch die Begriffe *Gruppe* und *Wirkung* sehr im Vordergrund stehen, denn das sind die Hauptbegriffe der Theorie von Symmetrie. Übrigens will ich versuchen, diese Begriffe noch etwas stärker zu betonen als Iversen, um Abkürzungen zu machen.

Literatur. Ausser dem kleinen Buch von Iversen (genauere Angaben dazu bald!) gibt es Vorlesungsnotizen von mir zu einer Vorlesung mit diesem Thema, die ich vor 3-4 Jahren gehalten habe. Diese sollen bald hochgeladen werden. Sie sind noch etwas unvollständig.

Vorbereitung. Es wäre gut, sich mal die Begriffe *Metrischer Raum* und *Gruppe, Wirkung* anzuschauen, zum Beispiel bei Wikipedia. (Bei Wikipedia heisst es: *Gruppe* (*Mathematik*). Ausserdem heisst es da eher *Gruppenoperation* statt Gruppenwirkung. Englisch: *Group action*.) Als Buch zum Thema Gruppen und Wirkungen fällt mir ein: Neumann-Stoy-Thompson, *Groups and Geometry*, Oxford Science Publications, Oxf.Univ.Press 1994. Es gibt auch Bücher zum Thema *Metrische Räume*, aber besser ist es wahrscheinlich, sich ein Buch mit dem Titel *Topologie* oder ähnlich herauszusuchen und da das Kapitel über metrische Räume. Zum Beispiel: Botho von Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, Springer-Verlag 1973.