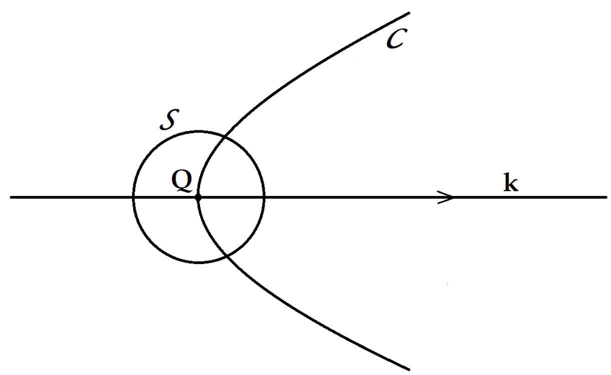
22.01.2016

Vorlesungsnotizen Woche 12
Nichteuklidische Geometrie, WS 2015-2016 (Weiss)

Hier geht es meistens um einen metrischen Raum X, der die Axiome I und II erfüllt, aber Axiom III verletzt. Wir legen es darauf an, die Isometriegruppe $G = \mathrm{isom}(X)$ zu verstehen, um X zu verstehen. Die Gruppe G bauen wir aus gewissen Untergruppen auf, die zu gewissen geometrischen Objekten in X gehören. Deswegen suchen wir uns aus: ein $Q \in X$ und eine Gerade k in X, die Q enthält; sie soll auch orientiert sein. Indem wir Q ausgewählt haben, haben wir auch einen Kreis $\mathcal{S}$ vom Radius r um Q ausgewählt. (Bezeichnungen wie in Vorlesungsnotizen Wochen 9 und 10; das r muss klein genug sein, aber positiv.) Ausser diesen hübschen Dingen werden wir uns noch mit einem zusätzlichen Typ von Teilmenge von X beschäftigen müssen, der *Horozykel* heisst. Die orientierte Gerade k und $Q \in k$ bestimmen einen Horozykel $\mathcal{C}$.



Die Untergruppen von $G = \mathrm{isom}(X)$, die hier wichtig sind, sind grob gesagt

- G_Q , Standgruppe von Q bei der üblichen Wirkung von G auf X;
- die Untergruppe $T(k)$ von G bestehend aus den Isometrien, die k orientierungserhaltend in sich selber überführen und die auch jede Seite von k in sich selber überführen;
- die Untergruppe $H(\mathcal{C})$ bestehend aus den Isometrien, die den Horozykel $\mathcal{C}$ orientierungserhaltend in sich selber überführen. Diese Isometrien heissen übrigens *Horolationen.*

Es soll sich zum Beispiel herausstellen, dass jedes Element $\sigma \in G$ sich eindeutig schreiben lässt in der Form $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ mit $\sigma_1 \in G_Q$ und $\sigma_2 \in T(k)$ und $\sigma_3 \in H(\mathcal{C})$. (Das bedeutet allerdings nicht, dass wir die Multiplikation in G ohne Weiteres verstehen, wenn wir die Gruppen G_Q und $T(k)$ und

$\mathsf{H}(\mathcal{C})$ gut verstehen. Denn diese Zerlegung für Elemente von G verträgt sich nicht gut mit der Multiplikation in G.)

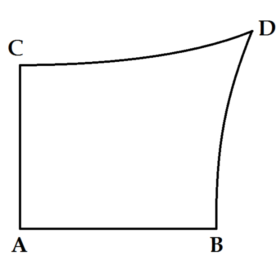
Die Untergruppen G_Q, $\mathsf{T}(\mathsf{k})$ und $\mathsf{H}(\mathcal{C})$ kann man so analysieren und verstehen, wie wir das im Fall von G_Q schon gemacht haben (Wochen 9 und 10). Jedes Element von G_Q gibt eine Isometrie von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ durch Einschränken, wobei $\mathcal{S}$ mit der normierten Bogenlängemetrik ausgestattet ist. Auf diese Weise konnten wir sehen, dass G_Q isomorph zu $O(2)$ ist. Ganz ähnlich kann man $\mathsf{H}(\mathcal{C})$ verstehen. Denn der Horozykel $\mathcal{C}$ hat auch eine Bogenlängemetrik (ungefähr genauso anstrengend, wie die Bogenlängemetrik auf $\mathcal{S}$), und es gibt dann eine Isometrie von $\mathcal{C}$ nach $\mathbb{R}$. Auf diese Weise sieht man, dass $\mathsf{H}(\mathcal{C})$ isomorph zur Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien von $\mathbb{R}$ (metrischer Raum) nach $\mathbb{R}$ (metrischer Raum) ist, und diese Gruppe ist bekanntlich isomorph zu $\mathbb{R}$ (kommutative Gruppe mit der üblichen Addition). Ausserdem ist es leicht zu sehen, dass $\mathsf{T}(\mathsf{k})$ isomorph ist zur Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien von k nach k, und diese ist wieder isomorph zu $\mathbb{R}$ (kommutative Gruppe mit der üblichen Addition).

Bevor wir zu diesen interessanten Figuren und Untergruppen kommen, müssen wir noch allerhand Fakten über Winkel, Winkelsummen in Dreiecken und dergleichen zusammentragen. Dabei wird der Winkelbegriff benutzt, der in Wochen 9 und 10 eingeführt wurde. — Da die Zeit abläuft, kann es sein, dass die Darstellung etwas lückenhaft oder oberflächlich wird.

12.1. Winkelsumme in Dreiecken

Wir nehmen erstmal an, dass X die Axiome I und II erfüllt (keine Vorgabe betreffend Axiom III).

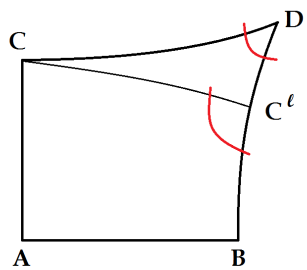
Proposition 12.1.1. *Gegeben Lambert-Viereck* $\square\mathsf{ABCD}$ *wie im Bild, also: rechte Winkel bei* $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$. *Dann ist der Winkel bei* D *nicht grösser als* $\pi/2$.



Beweis. Sei k die Gerade durch A und C und sei ℓ die Gerade durch B und D. Wegen Saccheri-Ungleichung ist

$$\mathsf{d}(\mathsf{B},\mathsf{D}) \geq \mathsf{d}(\mathsf{B}^\mathsf{k},\mathsf{D}^\mathsf{k}) = \mathsf{d}(\mathsf{A},\mathsf{C}) \geq \mathsf{d}(\mathsf{A}^\ell,\mathsf{C}^\ell) = \mathsf{d}(\mathsf{B},\mathsf{C}^\ell).$$

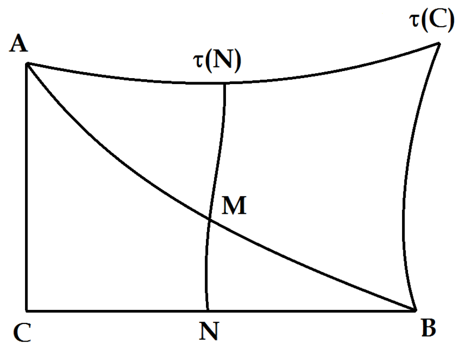
Wenn $C^\ell = D$, dann sind wir fertig (rechter Winkel bei D). Sonst folgt aus $d(B, D) \geq d(B, C^\ell)$, dass $D \notin [B, C^\ell]$; in Worten, C^ℓ liegt unterhalb von D im Sinne des Bildes. Aufgabe 4 von Blatt 10 sollte zeigen, dass der im Bild unten eingezeichnete Winkel von $[C, C^\ell]$ mit ℓ mindestens so gross ist wie der Winkel von $[C, D]$ mit ℓ. Aber der Winkel von $[C, C^\ell]$ mit ℓ ist ja $\pi/2$. $\square$



Theorem 12.1.2. *In jedem Dreieck ΔABC in X ist die Winkelsumme $\leq \pi$.*

Schritt 1 vom Beweis. Zurückführen auf den Fall eines rechtwinkligen Dreiecks. OBdA ist $d(A, B) \geq d(B, C)$ und $d(A, B) \geq d(A, C)$. Sei k die Gerade durch A und B. Die Senkrechte n zu k durch C (auch genannt eine Höhe des Dreiecks, wenn ich mich nicht irre) zerteilt das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke, ΔAC^kC und ΔC^kBC. Die Winkelsumme des ursprünglichen Dreiecks ist gleich Winkelsumme der beiden kleinen Dreiecke zusammengenommen, minus π.

Schritt 2. Fall eines rechtwinkligen Dreiecks zurückführen auf Prop 12.1.1. Wir nehmen das rechtwinklige Dreieck ΔABC, rechter Winkel bei C, und machen eine Punktspiegelung τ am Mittelpunkt M von $[A, B]$. Sei N die senkrechte Projektion von M auf die Gerade durch B und C. Dann liegen $M, N, \tau(N)$ auf einer Geraden. Jetzt ist $\square CN\tau(N)A$ ein Lambert-Viereck. $\square$



Theorem 12.1.3. *Wenn* X *das Axiom III verletzt, dann ist in jedem Dreieck* ΔABC *in* X *die Winkelsumme* $< \pi$.

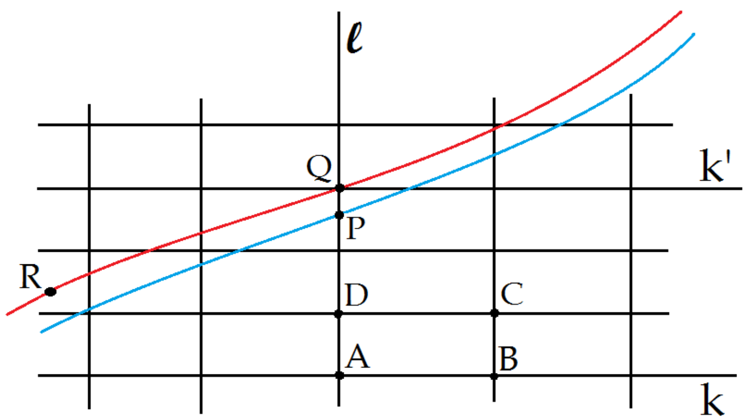
Beweis. Angenommen, das ist falsch für ein gewisses Dreieck; dann ist die Winkelsumme in diesem Dreieck genau π wegen Theorem 12.1.2. Dieses Dreieck können wir dann wieder in zwei rechtwinklige aufteilen, von denen jedes Winkelsumme π haben muss. Aus einem dieser rechtwinkligen Dreiecke mit Winkelsumme π können wir dann durch Punktspiegelung am Mittelpunkt der Hypotenuse (der Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt) ein waschechtes Rechteck bauen, also ein Viereck mit 4 rechten Winkeln. Ich habe die Ecken dieses Vierecks jetzt A, B, C, D genannt (ohne Rücksicht darauf, was A, B, C vorher bedeutet haben). Durch wiederholte Geradenspiegelungen and den Seiten dieses Rechtecks erhalten wir ein Gitter von Geraden wie die schwarzen Geraden im Bild unten; man könnte von Vertikalen und Horizontalen reden. Jedenfalls sind alle Schnittwinkel zwischen diesen Geraden rechte Winkel.

Jetzt benutzen wir die Annahme, dass Axiom III verletzt ist. Dann gibt es einen Punkt $P \in X \setminus k$, durch den mehrere Geraden gehen, die parallel zur Geraden k durch A und B sind. Dieser Punkt P liegt auf irgendeiner Geraden ℓ, die k senkrecht trifft; nach Anwendung einer Isometrie können wir annehmen, dass ℓ die Gerade durch A und D ist und dass P sich auf der richtigen Seite von k befindet, wie im Bild unten angedeutet. Eine von den Geraden durch P, die parallel zu k sind, ist immer die Senkrechte durch P zu ℓ. Die interessiert uns aber nicht so, deswegen habe ich eine andere Gerade durch P in Blau und schräg eingezeichnet. Die soll also parallel zu k sein, aber *nicht* senkrecht zu ℓ. Die rote schräge Gerade darüber ist dadurch bestimmt, dass sie denselben Winkel mit ℓ macht wie die blaue, also keinen rechten Winkel, aber durch Q geht (wobei Q einer der Gitterpunkte ist). Sie ist dann auch parallel zu k (Aufgabe 3 von Blatt 10).

Jetzt haben wir einen Widerspruch. Denn nach einer Abschätzung aus Vorlesungsnotizen Woche 7 (Prop. 7.1.3) muss für Punkte R in der roten Geraden genügend weit weg von Q der minimale Abstand zur (horizontal gezeichneten) Geraden k' durch Q beliebig gross werden. Wir sehen aber, dass er (falls R auch noch zur linken Seite von ℓ gehört[1]) nicht grösser werden kann als

$$d(A,Q) + d(A,B).$$

(Denn so ein R liegt in einem der kleinen Rechtecke[2] zwischen den Geraden k und k' , dessen Ecken wir etwa A', B', C', D' nennen können. Wenn wir das Segment $[D', R]$ verlängern bis zum nächsten Schnittpunkt R' mit dem Rechteckrand, dann ergibt sich $d(D', R) \le d(D', R') \le d(A, D) + d(A, B)$. Ausserdem ist der Abstand von D' zum nächstgelegenen Punkt auf der Geraden k' höchstens $d(A, Q) - d(A, D)$.) $\square$



Bemerkung 12.1.4. (Iversen, I.9.10 und I.9.11.) Für ein Dreieck ΔABC mit Winkeln α, β, γ ist die Zahl

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

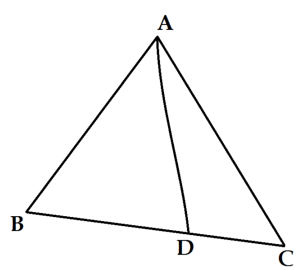
[1]Nicht vergessen: Eine Seite von ℓ ist eine spezielle Teilmenge von $X \setminus \ell$.

[2]Man kann stundenlang darüber nachdenken, was das eigentlich heissen soll! Es soll wahrscheinlich heissen: R ist rechts von der Geraden durch A' und D' oder auf dieser Geraden; links von der Geraden durch B' und C' oder auf dieser Geraden; oberhalb von der Geraden durch A' und B' oder auf dieser Geraden; unterhalb von der Geraden durch D' und C' oder auf dieser Geraden. Dann kann man sich noch überlegen, was *rechts, links, oberhalb, unterhalb* bedeuten soll. Diese Worte bezeichnen gewisse Seiten von gewissen Geraden. Ebenso: *zwischen* k und k' sind alle Punkte von X, die entweder zu $k \cup k'$ gehören oder oberhalb von k und unterhalb von k' sind ... wobei *oberhalb von* k eine Seite von k bezeichnet und *unterhalb von* k' eine Seite von k'.

der *Winkeldefekt* vom Dreieck; Bezeichnung $\mathrm{dfk}(\Delta ABC)$ oder ähnlich. Der Winkeldefekt hat folgende Eigenschaft: Wenn ein Dreieck ΔABC unterteilt ist in Dreiecke ΔABD und ΔADC, wie im Bild unten, dann ist

$$\mathrm{dfk}(\Delta ABC) = \mathrm{dfk}(\Delta ABD) + \mathrm{dfk}(\Delta ADC).$$

Diese Formel erinnert an *Fläche* (Areal). Im Fall einer euklidischen Geometrie (Axiome I,II,III erfüllt) ist das nicht weiter interessant, denn $\mathrm{dfk}(\Delta ABC)$ ist ja dann immer gleich Null. Wenn aber Axiom III verletzt ist, dann ist $\mathrm{dfk}(\Delta ABC)$ immer strikt positiv, wie wir gerade bewiesen haben. Dann kann man diesen Gedanken *Defekt ist so etwas wie Fläche/Areal* rechtfertigen. Genauer, die Fläche von ΔABC kann mit $c \cdot \mathrm{dfk}(\Delta ABC)$ gleichgesetzt werden für eine gewisse positive Konstante $c \in \mathbb{R}$, die nur von X abhängt, nicht von ΔABC in X. Das hat die seltsame Konsequenz, dass die Fläche eines ganz beliebigen Dreiecks in X immer $< c \cdot \pi$ ist, denn der Winkeldefekt ist (natürlich) immer kleiner als π. Saccheri wusste das übrigens. Es war wohl eine der Folgerungen aus der Negation von Axiom III, die er einfach zu absurd fand, um sich weiter nach Beispielen (von metrischen Räumen, die Axiom I und II erfüllen, aber Axiom III verletzen) umzusehen.



12.2. Senkrechte Projektion im nicht-euklidischen Fall

Hier wird angenommen, dass X die Axiome I und II erfüllt, aber III verletzt. Dann haben wir Theorem 12.1.3 zur Verfügung, und das ist auch das wichtigste Hilfsmittel im Beweis von folgendem Lemma.

Lemma 12.1.5. *Gegeben Geraden k und h in X, die einander schneiden. Sei $p_k \colon X \to k$ die senkrechte Projektion auf k. Dann ist $p_k(h)$ entweder ein Punkt oder ein* beschränktes *offenes Intervall in k.*

Beweis: Iversen III.5.1. Hübsch. Dazu auch Lemma 7.1.2 aus Vorlesungsnotizen Woche 7. Das zeigt sofort, dass $p_k(h)$ entweder ein Punkt ist (Fall

$\mathtt{h} \perp \mathtt{k}$) oder ein offenes Intervall. Ich glaube, Iversen setzt das voraus und konzentriert sich darauf, zu beweisen, dass das Intervall beschränkt ist. $\square$

Bemerken: Im euklidischen Fall ($\mathsf{X} = \mathbb{E}$) ist $\mathtt{p}_\mathtt{k}(\mathtt{h})$ entweder ein Punkt (wenn $\mathtt{h}$ senkrecht zu $\mathtt{k}$ ist) oder ganz $\mathtt{k}$, also in den meisten Fällen *nicht* beschränkt.