12.05.2018

5. Übungsblatt
Char. Klassen, Krümmung usw., SS 18 (Weiss)

1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, ausgerüstet mit einer glatten Wirkung einer endlichen Gruppe K. Dann ist jede Zusammenhangskomponente L der Fixpunktmenge M^K eine glatte Untermannigfaltigkeit.[1] Für ihre Tangentialräume gilt

$$T_xL = (T_xM)^K \ ,$$

das heisst, der Tangentialraum von L an einem Punkt $x \in L$ ist der Untervektorraum von T_xM bestehend aus den Fixpunkten der Wirkung von K auf T_xM (die durch die Wirkung von K auf M bestimmt wird, weil x Fixpunkt ist).

2. Gegeben zwei injektive Vektorbündelhomomorphismen $f, g\colon TS^2 \to S^2 \times \mathbb{R}^3$. [Es handelt sich um Vektorbündel über S^2; das Ziel ist das triviale Vektorbündel $S^2 \times \mathbb{R}^3 \to S^2$; also sind f und g stetige Abbildungen, die jede Faser T_yS^2 linear und injektiv nach $\{y\}\times\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ abbilden, mit demselben $y \in S^2$. Ob f und g auch glatt sind, ist mir hier egal.] Man zeige, dass f und g als solche homotop sind; dass heisst, es existieren injektive Vektorbündelhomomorphismen $h_t\colon TS^2 \to S^2\times\mathbb{R}^3$ mit $t \in [0,1]$, die stetig von t abhängen und $h_0 = f$, $h_1 = g$ erfüllen.[2]

3. Sei η das tautologische reelle Geradenbündel[3] über $\mathbb{R}P^n$. [Wenn wir Punkte von $\mathbb{R}P^n$ als Bahnen der Wirkung von $\{\pm 1\}$ auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ beschreiben, dann ist die Faser von η über so einer Bahn $\{\pm x\}$ der 1-dimensionale lineare Unterraum $\mathbb{R}\cdot x$ von $\mathbb{R}^{n+1}$.] Sei ε das triviale reelle Geradenbündel, also $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}P^n$.) Dann gibt es einen Vekorbündelisomorphismus (von Vektorbündeln über $\mathbb{R}P^n$)

$$T(\mathbb{R}P^n) \oplus \varepsilon \longrightarrow \underbrace{\eta \oplus \eta \oplus \cdots \oplus \eta}_{n+1} \ .$$

Diesr Isomorphismus hat auch eine komplexe Variante, bei der zum Beispiel $\mathbb{R}P^n$ durch $\mathbb{C}P^n$ ersetzt wird. Wie sieht sie aus?

Abgabetermin 17.5. morgens. Briefkasten 58. Punkte etwa: 7,7,6.

---

[1] Die Zusammenhangskomponenten werden hier getrennt aufgeführt, weil sie verschiedene Dimensionen haben können.

[2] Diese Berechnung ist von Interesse im Zusammenhang mit Immersionstheorie. Eine glatte Immersion ist eine glatte Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen glatten Mannigfaltigkeiten, für die die Ableitungen $T_xf\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ sämtlich injektiv sind. Die erste grosse Entdeckung der Immersionstheorie war, dass zwei glatte Immersionen $u, v\colon S^k \to \mathbb{R}^n$ (mit $k < n$) genau dann regulär homotop sind, also glatt homotop als Immersionen, wenn die injektiven Vektorbündelhomomorphismen $TS^k \to S^k \times \mathbb{R}^n$, die sie bestimmen, als solche homotop sind. Mit der Berechnung in dieser Aufgabe folgt daraus, dass alle glatten Immersionen $S^2 \to \mathbb{R}^3$ regulär homotop sind. Das ist sehr überraschend, denn unter diesen gibt es einerseits die Inklusion $u\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$, andererseits auch $v = -u$.

[3] Eigentlich sollte man hier wohl $\eta\colon E \to \mathbb{R}P^n$ oder etwas von der Art schreiben, aber es wäre zu umständlich.