20.06.2013

Notizen zur 9. Vorlesungswoche Knotentheorie SS 2012/13 (Weiss)

Ein wichtiges Thema der Woche war der Satz über eindeutige Zerlegung von Knoten in Primknoten. Der Beweis erwies sich allerdings als schwierig, jedenfalls ungeeignet für eine Darstellung an der Tafel. In diesem Aufschrieb sollen deswegen mehr Einzelheiten geliefert werden.
Sanderson hat zu diesem Thema leider wenig. Bei Lickorish gibt es eine ordentliche Formulierung (Theorem 2.10), die gleich wiedergegeben werden soll. Dazu gibt er einen Beweis, den ich sehr skizzenhaft finde, den ich aber nach und nach doch verstehen konnte. Dieser soll hier breitgetreten werden.

Def. Ein Knoten K ist *nicht prim*, wenn K isotop ist zu einer Knotensumme $K_1 + K_2$, wobei weder K_1 noch K_2 isotop zum Unknoten sind. Andernfalls ist K *prim*.

Satz. *Jeder nichttriviale Knoten K lässt sich als Summe von endlich vielen Primknoten schreiben, also K isotop zu $K_1 + K_2 + \cdots + K_r$, wobei $K_1, K_2, \ldots, K_r$ Primknoten sind.*

Beweis. Induktion nach $g(K)$, dem Geschlecht von K. Wir wissen, dass $g(K) > 0$ sein muss, weil $g(K) = 0$ bedeutet, dass K isotop zum Unknoten ist (siehe Übungsaufgaben). Induktionsanfang: Wenn $g(K) = 1$, dann ist K prim. Denn wäre K isotop zu $K_1 + K_2$, dann

$$g(K) = g(K_1) + g(K_2)$$

wie letzte Woche bewiesen, also $g(K_1) = 0$ oder $g(K_2) = 0$, damit mindestens einer der Knoten K_1 , K_2 trivial. Sei jetzt $g(K) > 1$. Wenn K nicht selbst prim, dann K isotop zu $K_1 + K_2$ wobei K_1 und K_2 beide nicht trivial. Dann ist $g(K_1) < g(K)$ und $g(K_2) < g(K)$, weil $g(K_1) + g(K_2) = g(K)$. Wegen Induktionsvoraussetzung lassen sich K_1 und K_2 als Summen von Primknoten schreiben. Dann ist klar, dass sich auch $K_1 + K_2$ als Summe von Primknoten schreiben lässt. □

Jetzt zur Eindeutigkeit der Primknotenzerlegung, die (wie bei der Primzerlegung von natürlichen Zahlen) schwieriger zu beweisen ist als die Existenz. Bei der Primzerlegung von natürlichen Zahlen formuliert man die Eindeutigkeit (im Hinblick auf Beweis) gerne so. *Wenn m und n positive natürliche Zahlen sind und p eine Primzahl, die mn teilt, dann gilt entweder $p|m$ oder $p|n$.* Bei der Primzerlegung von Knoten wollen wir auch eine derartige Aussage machen. Sie reicht uns aber nicht, weil noch eine zusätzliche Frage auftritt. Sei etwa K isotop zu einer Knotensumme $P + Q$, und auch zu einer Knotensumme $P + R$. Folgt dann, dass Q isotop ist zu

R ? Diese Kürzungshypothese ist garnicht selbstverständlich, während die entsprechende Aussage bei natürlichen Zahlen selbstverständlich ist (wenn $k = pq$ und $k = pr$, dann ist $q = r$). Deswegen ist bei Lickorish der Eindeutigkeitssatz für Primknotenzerlegung so formuliert:

Satz. *Gegeben ein Knoten K, isotop zu einer Knotensumme $K_1 + K_2$, und auch isotop zu $P + Q$ wobei P prim. Dann ist entweder K isotop zu $P + R_1 + K_2$, wobei K_1 isotop zu $P + R_1$ und Q isotop zu $R_1 + K_2$, oder K isotop zu $K_1 + R_2 + P$, wobei K_2 isotop zu $R_2 + P$ und Q isotop zu $K_1 + R_2$.*

Korollar. Sei K ein Knoten, der als Summe $P_1 + P_2 + \cdots + P_r$ von Primknoten dargestellt werden kann, und auch als Summe von Primknoten $P'_1 + P'_2 + \cdots + P'_s$. Dann ist $r = s$, und es gibt eine Permutation σ von $\{1, 2, \ldots, r\}$ derart, dass P_i isotop ist zu $P'_{\sigma(i)}$, für $i = 1, 2, ..., r$.

Beweis von Korollar modulo Satz: Übungsaufgabe.

Um den Satz, wie er oben formuliert ist, zu beweisen, sollte man sich zuerst überlegen, wie algebraische Formeln vom Typ $K \sim P + Q$ oder $K \sim K_1 + K_2$ oder $K \sim K_1 + R_2 + P$ (wobei ich $\sim$ für *isotop* benutze) geometrisch gerechfertigt werden können.

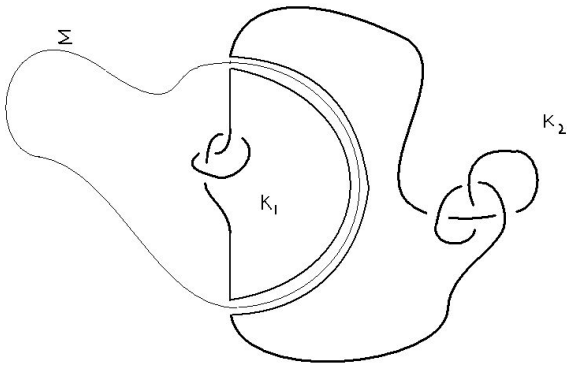
Def. Unter einer *geometrischen Zerlegung* eines Knotens K soll verstanden werden: eine glatte kompakte Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ ohne Rand, die

- den Knoten K in genau zwei Punkten p und q schneidet, und zwar transversal;
- das Geschlecht Null hat (d.h., es gibt eine umkehrbare differenzierbare Abbildung von S^2 nach Σ).

Die geometrische Zerlegung bestimmt eine algebraische Zerlegung wie folgt. Wir wählen eine glatte reguläre Kurve C von p nach q in der Fläche Σ. (Es ist egal wie, denn diese sind alle isotop in Σ mit festgehaltenen Endpunkten.) Das Komplement von Σ in $\mathbb{R}^3$ hat zwei Zusammenhangskomponenten, eine beschränkte und eine unbeschränkte (siehe Satz von Schönflies, weiter unten). Sei D_Σ die Vereinigung der beschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \Sigma$ mit Σ selbst, und E_Σ die Vereinigung der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \Sigma$ mit Σ selbst. Sei

$$K_1 := \big(K \cap D_\Sigma\big) \cup C \ , \qquad K_2 := \big(K \cap E_\Sigma\big) \cup C \ .$$

(Ecken in K_1 und K_2 an den Stellen p und q sollen abgerundet werden.) Dann ist K isotop zu $K_1 + K_2$.



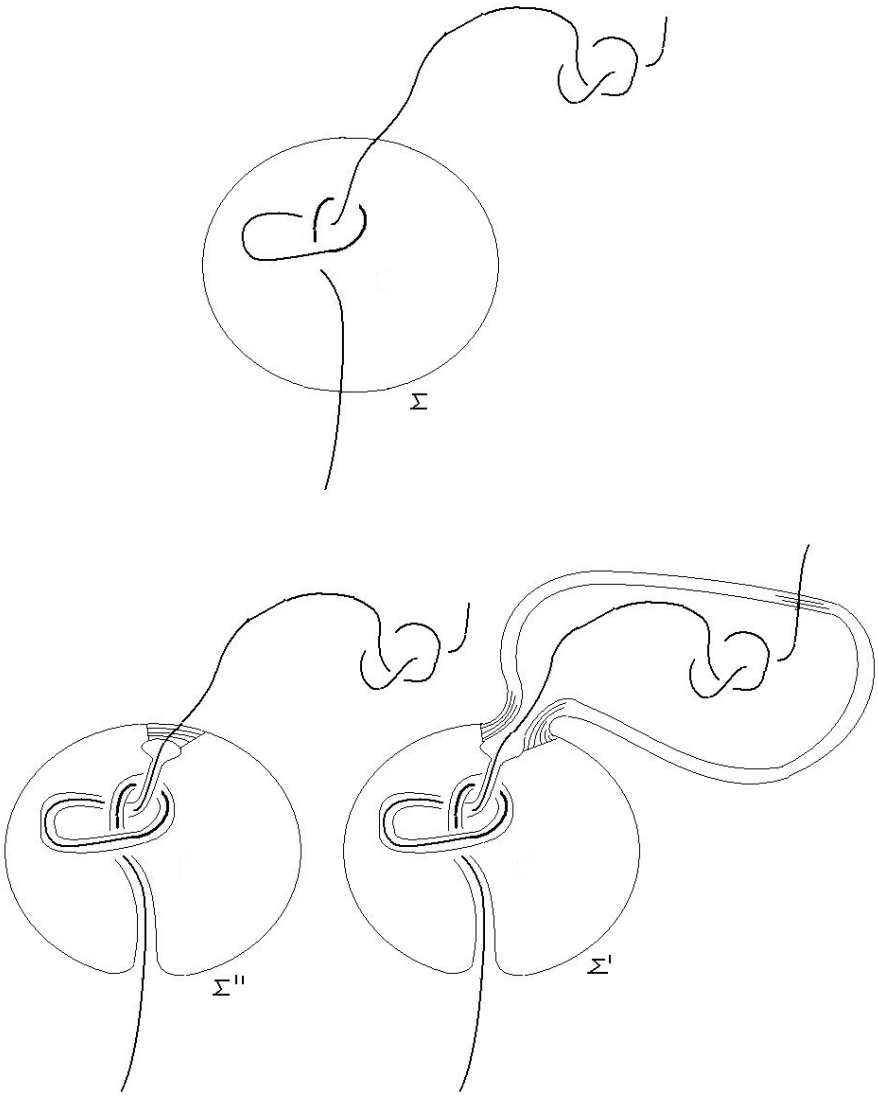
Dabei haben wir benutzt, dass Σ sich durch eine Isotopie in die Standardsphäre S^2 verformen lässt. Diese Isotopie kann sogar als eine Familie von Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gewählt werden, also $g_t \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ für $t \in [0,1]$ mit $g_0 = \mathrm{id}$ und $g_1(\Sigma) = S^2$, jedes g_t umkehrbar-glatt, und $(x,t) \mapsto g_t(x)$ soll dabei auch glatt sein. Dass das immer möglich ist, ist der Inhalt des Satzes von Schönflies (in der Dimension 3). Es gibt eine einfachere Variante davon in der Dimension 2, die dann auch *Jordan'scher Kurvensatz* heisst. Brauchen wir ebenfalls (immerzu, ohne Beweis).

Es lohnt sich auch, darüber nachzudenken, auf wie viele Arten eine algebraische Zerlegung $K \sim K_1 + K_2$ durch eine geometrische Zerlegung gerechtfertigt werden kann. Die Antwort ist leider meistens: auf sehr viele Arten. Diese Tatsache macht die Arbeit für uns schwierig. Die folgenden Definitionen schaffen etwas Überblick in dieser Vielfalt.

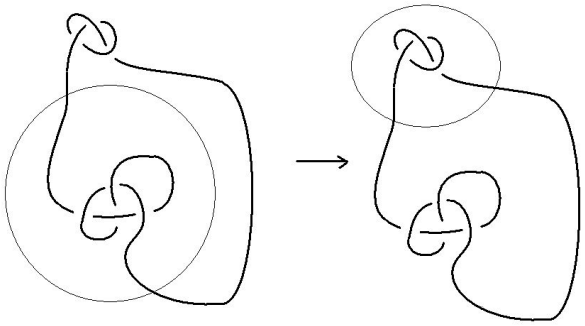
Def. Gegeben geometrische Zerlegungen Σ und Σ' eines Knotens K. Wir sagen, dass die beiden Zerlegungen K*-isotop* sind, wenn es eine glatte Isotopie $(\Sigma_t)_{t\in[0,1]}$ gibt mit $\Sigma_0 = \Sigma$ und $\Sigma_1 = \Sigma'$, wobei jedes Σ_t transversalen Durchschnitt mit K hat, bestehend aus zwei Punkten[1]. Wir sagen, dass die beiden geometrischen Zerlegungen *elementar-verwandt* sind[2], wenn es kompakte Standard(tuben-)umgebungen W von $K \cap D_\Sigma$ in D_Σ und W' von $K \cap D_{\Sigma'}$ in $D_{\Sigma'}$ gibt, so dass $D_\Sigma \smallsetminus W = D_\Sigma \smallsetminus W'$. Wir sagen, dass die geometrischen Zerlegungen Σ und Σ' *verwandt* sind, wenn eine dritte geometrische Zerlegung Σ'' von K existiert derart, dass Σ K-isotop zu Σ'' ist und Σ'' elementar-verwandt mit Σ'.

[1]Dabei erlauben wir uns gelegentlich, so eine Isotopie in $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$ durchzuführen!

[2]Meine Wortwahl. Als engl. Übersetzung schlage ich *akin* vor.



(Das Bild zeigt, welche drastischen Veränderungen dabei möglich sind: oben K und Σ, links unten K und Σ'', rechts unten K und Σ'. Hier gibt es eine K-Isotopie von Σ nach Σ'' — durch ein Aushöhlen von D_Σ, das dem Knoten folgt. Weiter sind Σ'' und Σ' elementar-verwandt, also Σ und Σ' verwandt. Die kleine schraffierte Region im Σ''-Bild ist W, während W' im Σ'-Bild wegen Faulheit zum grossen Teil unschraffiert geblieben ist. Alles natürlich irgendwie im Querschnitt dargestellt ausser K.)



(Dieses Bild zeigt zwei geometrische Zerlegungen vom selben Knoten K, die K-isotop sind, wenn wir eine Isotopie in S^3 zulassen, sonst aber nicht.)

Lemma. *Wenn zwei geometrische Zerlegungen Σ und Σ' von K verwandt sind, dann bestimmen sie dieselbe algebraische Zerlegung $K \sim K_1 + K_2$.*

Beweis. Wie im vorletzten Bild wird angenommen, dass Σ K-isotop zu Σ'' und Σ'' elementar-verwandt mit Σ' ist. Es ist klar, dass Σ und Σ'' dann dieselbe algebraische Zerlegung bestimmen. Deswegen könnten wir Σ eigentlich jetzt vergessen, aber ich brauche es zur Illustration, und erlaube mir deswegen auch, anzunehmen, dass die K-Isotopie von Σ nach Σ'' in $\mathbb{R}^3$ vor sich geht.
Der Beweis ist leider nicht so elementar, wie ich ihn gerne haben möchte. Er benutzt den Begriff *Ball-Bogen-Paar*. In den Bildern gerade oben haben wir drei solche Paare: $(D_\Sigma, D_\Sigma \cap K)$, $(D_{\Sigma'}, D_{\Sigma'} \cap K)$ und $(D_{\Sigma''}, D_{\Sigma''} \cap K)$. Sie sind zueinander diffeomorph als Paare (hier 3-dimensionale Mannigfaltigkeit mit 1-dimensionaler Untermannigfaltigkeit), und deswegen ist in allen Fällen der Bogen genauso böse verknotet im Ball, wie er im ersten Fall verknotet ist (hier: Kleeblattknoten). Für uns symbolisieren diese Ball-Bogen-Paare den "ersten" Summanden K_1 von K, der in den drei geometrischen Zerlegungen ohnehin derselbe ist. Jetzt wird gefragt, wie man eine Subtraktion von K_1 bewerkstelligen kann, also so etwas wie K minus K_1. Dabei soll eine von den geometrischen Zerlegungen von K, die wir vergleichen, benutzt werden. Es gibt mindestens drei Methoden/Auffassungen:

- Den Bogen in seinem Ball durch einen Bogen mit denselben Anfangs- und Endpunkten ersetzen, der unverknotet ist im selben Ball.
- Das ganze Ball-Bogen-Paar herausschneiden und ersetzen durch ein Ball-Bogen-Paar, in dem der Bogen unverknotet ist im Ball.
- *Nur* das Innere vom Komplement von einer Standard-Tubenumgebung vom Bogen im Ball herausschneiden und stattdesen einen vollen Torus

(auch bekannt als $S^1 \times D^2$) einkleben (die Klebefläche ist der Rand vom vollen Torus). Das Resultat ist dann wieder ein Ball-Bogen-Paar, in dem aber der Bogen unverknotet ist. Denn er hat das Komplement, das einen unverknoteten Bogen charakterisiert; das Komplement einer Tubenumgebung von diesem Bogen ist ein voller Torus.

Wir entscheiden uns für die dritte Methode. Wenn man dieses Spiel mit dem Ball-Bogen-Paar gehörend zu Σ'' spielt, dann erhält man als Resultat der Subtraktion den zweiten Summanden von K, der durch die geometrische Zerlegung Σ oder Σ'' bestimmt wird. Wenn man das Spiel stattdessen mit dem Ball-Bogen-Paar gehörend zu Σ' spielt, dann erhält man als Resultat der Subtraktion den zweiten Summanden von K, der durch die geometrische Zerlegung Σ' bestimmt wird. Es war aber dasselbe Spiel, denn was wir herausgeschnitten und durch einen vollen Torus ersetzt haben, war in beiden Fällen dasselbe (aufgrund der Annahmen). Also folgt, dass die beiden zweiten Summanden, die durch die Zerlegungen Σ (oder Σ'') bzw Σ' bestimmt werden, isotop sind. (Um es ehrlicher zu sagen: wir haben eigentlich nur gezeigt, dass es eine umkehrbar-glatte orientierungserhaltende Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ gibt, die den einen Knoten in den anderen überführt. Eine umkehrbar-glatte orientierungserhaltende Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ ist aber immer isotop zur Identitaet, usw.) $\square$

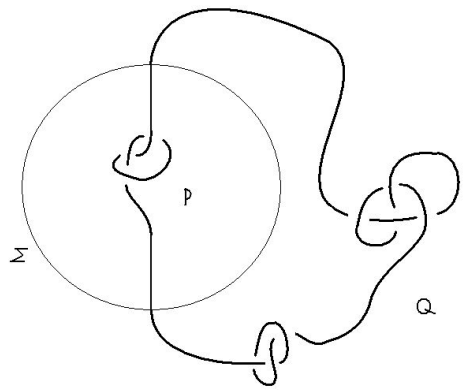
Jetzt können wir den Satz oben über Eindeutigkeit, in der algebraischen Formulierung, auf einen geometrischen Satz zurückführen.

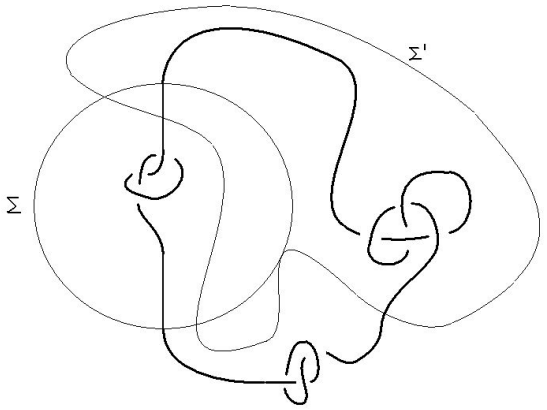
Satz. (Eindeutigkeit der Primknotenzerlegung, technisch-geometrische Version.) *Gegeben ein Knoten K mit zwei geometrischen Zerlegungen Σ und Σ'. Die entsprechenden algebraischen Zerlegungen sollen die Form $K \sim P + Q$ und $K \sim K_1 + K_2$ haben, wobei P prim. Dann gibt es eine dritte geometrische Zerlegung Σ'' von K, die mit Σ verwandt ist, und eine vierte Σ''', die K-isotop ist zu Σ', derart dass $\Sigma'' \cap \Sigma''' = \emptyset$ in $\mathbb{R}^3$.*

Es sollte klar sein, wie aus dieser geometrischen Formulierung die algebraische folgt. Wir ersetzen einfach die geometrische Zerlegung Σ durch Σ'', die ja auch zur algebraischen Zerlegung $K \sim P + Q$ führt (nach dem Lemma). Ebenso ersetzen wir die geometrische Zerlegung Σ' durch Σ''', die ja auch zur algebraischen Zerlegung $K \sim K_1 + K_2$ führt. Weil $\Sigma'' \cap \Sigma''' = \emptyset$, haben wir jetzt eine algebraische Zerlegung von K in drei Summanden, entweder $K \sim P + R_1 + K_2$ oder $K \sim K_1 + R_2 + P$ wie in der algebraischen Formulierung. Welche von diesen Möglichkeiten es ist, hängt davon ab, ob $\Sigma'' \subset D_{\Sigma'''}$ oder $\Sigma'' \subset E_{\Sigma'''}$.

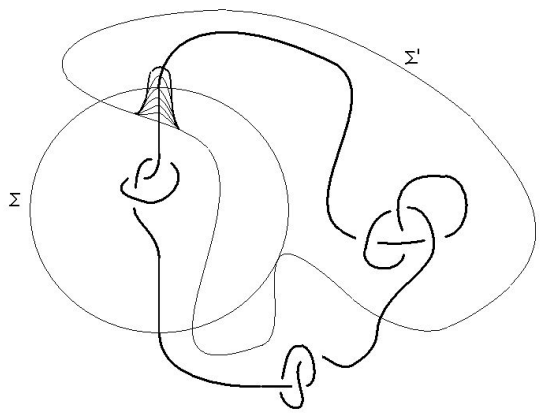
Jetzt also zum Beweis vom Eindeutigkeitssatz in der technisch-geometrischen Version. Für den Anfang und für die bildliche Darstellung ist es meistens

praktisch, anzunehmen (oBdA), dass Σ die Standardsphäre S^2 ist. (Nach Schönflies gibt es immer einen Diffeomorphismus, d.h. eine umkehrbar-glatte Abbildung, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die Σ auf die Standardsphäre abbildet.) Ausserdem bemühen wir uns, Σ' oder Σ durch K-Isotopien zu verändern, mit dem Ziel, den Durchschnitt $\Sigma \cap \Sigma'$ zu vereinfachen. (Wir schreiben allerdings meistens weiter Σ und Σ' für die geometrischen Zerlegungen von K, die während dieser Isotopie fabriziert werden, weil wir nicht recht wissen, was wir sonst schreiben sollen). Wir bewegen dabei K nicht.



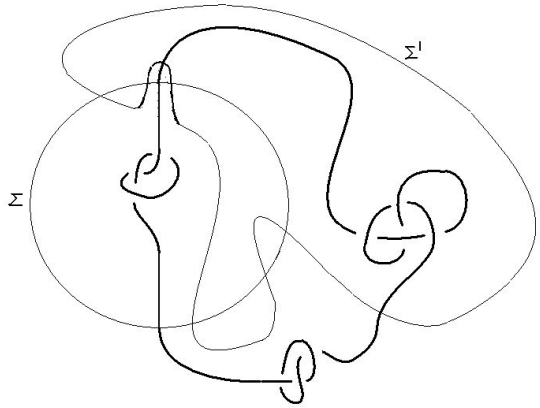


Erster Verbesserungsschritt: Wir wollen den Durchschnitt $\Sigma' \cap D^3 \cap K$ leeren oder leer machen. Das Bild zeigt ungefähr, was gemacht werden muss:



Das heisst, da, wo K einen Schnittpunkt mit Σ' hat, stülpen wir Σ' aus, so dass der Schnittpunkt sich aus D^3 hinausbewegt. (Das Ausstülpen ist eine Isotopie.)

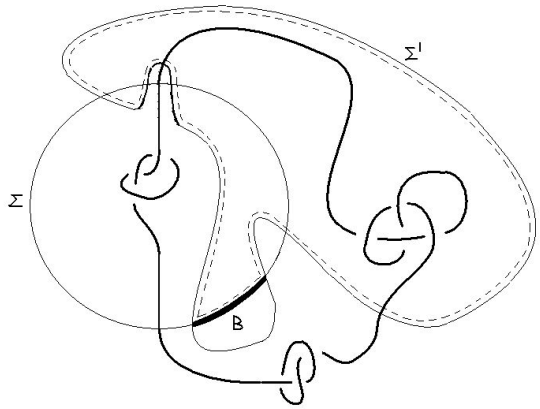
Zweiter Verbesserungsschritt: Wir können annehmen (nach einer kleinen Isotopie, anzuwenden auf Σ'), dass Σ' transversal ist zu $\Sigma = S^2$. Das bedeutet, dass an jedem $x \in \Sigma' \cap \Sigma$ die Tangentialräume $T_x\Sigma'$ und T_xS^2 verschieden sind. Jetzt haben wir etwa folgendes Bild:



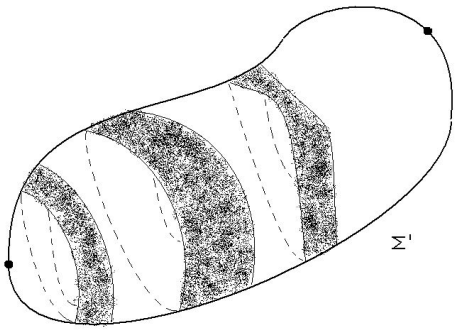
Wegen Transversalität ist der Durchschnitt $C = \Sigma \cap \Sigma'$ eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen geschlossenen (zusammenhängenden) Kurven, sagen wir $C = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ wobei $\sqcup$ für disjunkte Vereinigung steht. Wenn wir uns auf die Inklusion $C \subset S^2$ konzentrieren, fällt auf, dass C die Punkte p, q (Nordpol und Südpol) nicht enthält zB wegen Schritt 1. Wir können demnach die Komponenten $C_1, \ldots, C_r$ in zwei Typen einteilen. Denn nach dem Jordanschen Kurvensatz oder Schönflies in Dimension 2, siehe Bemerkungen weiter unten, zerfällt $\Sigma \smallsetminus C_j$ immer in zwei Zusammenhangskomponenten.

Wir fragen, ob p und q in derselben Zusammenhangskomponente von $\Sigma \setminus C_j$ liegen (dann ist C_j vom Typ 1) oder nicht (dann ist C_j vom Typ 2).

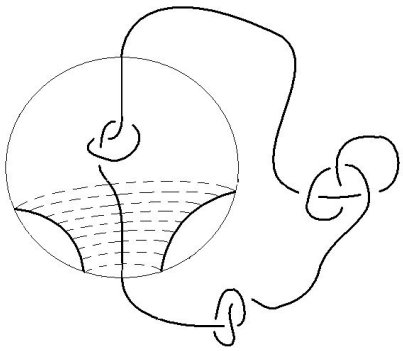
Dritter Verbesserungsschritt: Wir beseitigen die Komponenten C_j von $C = \Sigma \cap \Sigma'$, die vom Typ 1 sind. Dazu wählen wir unter diesen C_j eine aus, die in einer gewissen Hinsicht minimal ist. Dazu Definition: gegeben zwei verschiedene Komponenten C_i, C_j vom Typ 1; wir sagen $C_i < C_j$, wenn C_i in der Zusammenhangskomponente von $\Sigma \setminus C_j$ liegt, die Nordpol und Südpol nicht enthält. Diese Relation $<$ ist eine transitive Relation. Also gibt es ein C_{i_0} vom Typ 1, so dass weiter kein C_r vom Typ 1 existiert mit $C_r < C_{i_0}$. Ausserden bemerken wir, dass niemals ein C_r vom Typ 2 in der Zusammenhangskomponente von $\Sigma \setminus C_{i_0}$ liegen kann, die Nordpol und Südpol nicht enthält. Sei jetzt $B = B_{i_0}$ die Vereinigung von C_{i_0} mit der besagten Zusammenhangskomponente von $\Sigma \setminus C_{i_0}$ (die Nordpol und Südpol nicht enthält). Nach dem Jordan'schen Kurvensatz ist B diffeomorph zu einer Scheibe D_2. Nach Konstruktion schneidet B die Fläche Σ' nur in der Randkurve C_{i_0}. Demnach ist entweder $B \subset D_{\Sigma'}$ oder $B \subset E_{\Sigma'}$. OBdA trifft die erste Bedingung zu (denn wir können das notfalls durch eine K-Isotopie von Σ' in S^3 erreichen, die den Durchschnitt $\Sigma \cap \Sigma'$ unverändert lässt). Das heisst, dass $D_{\Sigma'}$ von der "Scheibe" B in zwei Portionen geteilt wird, die ihrerseits wieder (bis auf Glätten von Ecken) diffeomorph zu D^3 sind (nach Schönflies). Eine von diesen Portionen, nennen wir sie M_1, hat leeren Schnitt mit dem Knoten K, die andere, nennen wir sie M_2, hat $M_2 \cap K = D_{\Sigma'} \cap K \neq \emptyset$. Wir bauen jetzt eine leicht verkleinerte Version M_3 von M_2 (im Bild unten durch die gestrichelte Linie begrenzt) und lassen durch eine Isotopie $D_{\Sigma'}$ auf M_3 zusammenschrumpfen. Während der Isotopie verwandelt sich Σ' in den Rand von M_3. Wie man sieht, ist der Durchschnitt $\partial M_3 \cap \Sigma$ einfacher geworden als der alte Durchschnitt $\Sigma' \cap \Sigma$: die Kurve C_{i_0} ist verschwunden (und vielleicht noch ein paar andere C_j mit ihr).



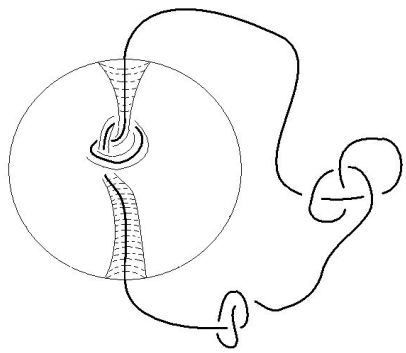
Vierter Verbesserungsschritt: Wir dürfen jetzt annehmen, dass $C = \Sigma \cap \Sigma'$ nur noch Zusammenhangskomponenten vom Typ 2 hat. Das heisst, dass jedes C_j in Σ die beiden Elemente von $\Sigma \cap K$ (Nordpol und Südpol) trennt; mit anderen Worten, die beiden Elemente sind auf die beiden Zusammenhangskomponenten von $\Sigma \setminus C_j$ verteilt. Äquivalent dazu ist, dass C_j Verschlingungszahl ± 1 mit dem Knoten hat. Diese letzte Bedingung ist allerdings symmetrisch ausgedrückt in Bezug auf Σ und Σ' ; also dürfen wir schliessen, dass C_j auch in Σ' die beiden Elemente von $\Sigma' \cap K$ trennt.
Mit diesem Argument können wir uns ein gutes Bild davon machen, wie die Fläche $F = \Sigma' \cap D_\Sigma$ aussieht. Es ist eine kompakte glatte Teilfläche von Σ', bei der jede Randkurve (Zusammenhangskomponente von ∂F) die beiden Elemente von $\Sigma' \cap K$ trennt. Daraus folgt, dass F jede Zusammenhangskomponente von F genau zwei Randkurven hat. Bild von Σ' mit der Teilfläche F (schattiert):



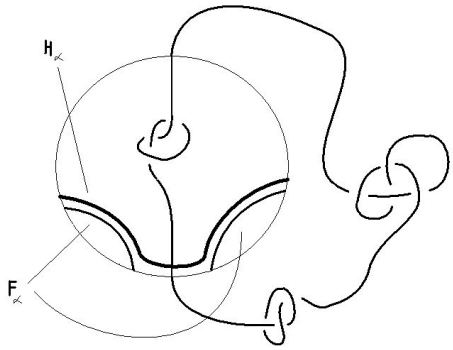
Die Lage einer Zusammenhangskomponente F_α von F in D_Σ kann man sich etwa so vorstellen (wobei D_Σ an der xz-Ebene aufgeschnitten):



Oder so:

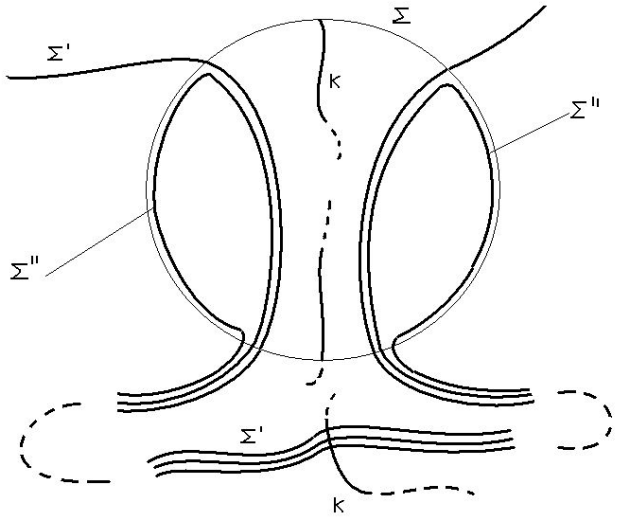


Das heisst, das Flächenstück F_α kann sich an den Knoten direkt anschmiegen oder auch nicht. Wir sagen dementsprechend, dass F_α vom schwierigen oder einfachen Typ ist.
Eine genauere Definition geht so. Von den zwei Randkurven von F_α können wir eine nördlich, die andere südlich nennen (wobei wir Bezug nehmen auf die Geographie in Σ: die südliche Randkomponente trennt die nördliche vom Südpol in Σ). Die südliche Randkurve von F_α begrenzt eine zusammenhängende Region G_α von Σ (die den Südpol enthält). Die Vereinigung $F_\alpha \cup G_\alpha$ ist eine Fläche mit nur einer Randkurve, die (nach Glätten von Ecken) zu einer Scheibe D^2 diffeomorph ist. Wir finden parallel dazu, in Richtung Inneres von D_Σ, eine andere glatte Fläche H_α, die auch zu einer Scheibe diffeomorph ist. Diese Fläche H_α schneidet den Knoten nur in einem Punkt und zerteilt so das Ball-Bogen-Paar $(D_\Sigma, D_\Sigma \cap K)$ in einen südlichen Teil und einen nördlichen Teil. Bild, sehr schematisch:



Weil das Ball-Bogen-Paar $(D_\Sigma, D_\Sigma \cap K)$ den Primknoten P darstellen sollte, muss jetzt entweder der südliche Teil auch den Primknoten P darstellen und der nördliche den trivialen Knoten, oder der südliche Teil muss den trivialen Knoten darstellen und der nördliche den Primknoten P. Im ersten Fall sagen

wir, dass F_α vom schwierigen Typ ist, im zweitem Fall, dass es vom einfachen Typ ist.
Jetzt bemühen wir uns, Komponenten F_α zu entfernen. Wenn so ein F_α vom einfachen Typ ist, dann heisst das, dass die Region zwischen H_α und G_α mitsamt dem darin enthaltenen Teil von K in angenehmer Weise kordinatisiert werden kann. Wir können diese Koordinaten benutzen, um eine K-Isotopie von Σ zu machen (!), bei der die zusammenhängende Teilfläche von Σ, die durch die Randkurve von H_α begrenzt wird und die den Südpol enthält, nach H_α bewegt wird. Bei Ende dieser K-Isotopie hat sich der Durchschnitt von Σ' mit dem (neuen) D_Σ vereinfacht; speziell ist F_α verschwunden.
Auf diese Weise können wir alle F_α vom einfachen Typ entfernen. Jetzt sind wir bei einer Situation angelangt, in der jede Zusammenhangskomponente C_j von $\Sigma' \cap \Sigma$ vom Typ 2 ist und jede Zusammenhangskomponente F_α von $F = \Sigma' \cap D_\Sigma$ vom schwierigen Typ (mit zwei Randkurven). Wir führen eine Relation zwischen den F_α ein, indem wir sagen $F_\beta < F_\alpha$ falls F_β und der Bogen $D_\Sigma \cap K$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $D_\Sigma \smallsetminus F_\alpha$ liegen (es gibt nur zwei). Das ist eine transitive Relation, und man überlegt sich, dass dadurch die F_α total geordnet werden. Jetzt suchen wir uns das minimale F_α für diese Ordnung heraus, also dasjenige, das "am weitesten von $D_\Sigma \cap K$ entfernt" ist. Wir versuchen *nicht*, es durch eine K-Isotopie von Σ oder Σ' verschwinden zu lassen. Unsere Wunderwaffe ist stattdessen eine neue geometrische Zerlegung Σ'' von K, die man ungefähr im Bild unten erahnen kann. Sie ist verwandt mit Σ. (Man kann es hoffentlich sehen, wenn man die Bilder nach Definition des Begriffs *verwandt* anschaut. Beachten, dass der Teil F_α von Σ' sich an den Knoten K anschmiegt, weil F_α vom schwierigen Typ ist; das Bild ist zu schematisch gehalten, um das zu zeigen. Im Bild ist F_α nicht gekennzeichnet; es soll eben der Teil von $D_\Sigma \cap \Sigma'$ sein, der sichtbar gemacht worden ist. Es kann noch andere F_β geben, die unsichtbar geblieben sind; sie sind näher an $D_\Sigma \cap K$.)

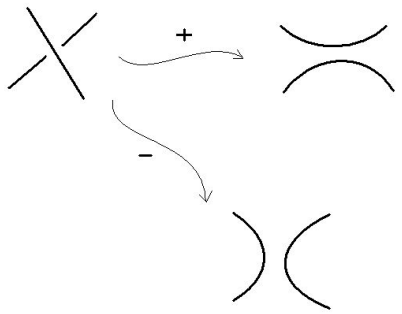


Und natürlich ist $\Sigma'' \cap \Sigma' = \emptyset$, wie man sieht. Damit ist der Beweis abgeschlossen. $\square$

Zweites Thema der Woche (Donnerstag-Vorlesung): Jones-Polynom für orientierte Verschlingungen. Dieses Thema ist an vielen Stellen gut dokumentiert, z.B. bei Lickorish und bei Sanderson, so dass ich mich kurz fassen kann. Wir fangen an mit dem *Klammerpolynom* $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ eines Verschlingungs*diagramms* D (ohne Orientierung), das eine Vorstufe zum Jones-Polynom ist. Wie aus den Bezeichnungen einigermassen ersichtlich, soll es ein Laurent-Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ werden. Die Unbestimmte heisst vorläufig A.
Dazu sei U_D die Menge der Doppelpunkte alias Überkreuzungen von D. Ein *Zustand* von D ist eine Abbildung

$$s \colon U_D \longrightarrow \{-1, +1\} \ .$$

Man fasst so einen Zustand auf als eine Anweisung, die Doppelpunkte von D in einer gewissen Weise aufzulösen. Und zwar so:



Das heisst, wir lösen den Doppelpunkt y auf wie beim Pfeil $+$ angedeutet, wenn $s(y) = +1$ ist und wie beim Pfeil $-$ angedeutet, wenn $s(y) = -1$ ist. (Dazu wird keine Orientierung des Diagramms gebraucht, aber wir benutzen die Orientierung der Ebene und notfalls einen Begriff wie "vorne links *und* hinten rechts vom überkreuzenden Zweig".) Wenn wir so den Zustand s benutzen, um alle Doppelpunkte von D aufzulösen, erhalten wir ein neues Diagramm, das sD heissen soll. Es hat keine Doppelpunkte und muss demnach in eine gewisse Anzahl von geschlossenen Kurven zerfallen. Diese Anzahl soll $|sD|$ heissen. Es wird definiert

$$\langle D\rangle := \sum_s \left(A^{\Sigma_y s(y)}(-A^{-2}-A^2)^{|sD|-1}\right).$$

Dabei erstreckt sich die grosse Summe über die Zustände s von D. Die kleine Summe $\Sigma_y s(y)$ ist einfach die Summe aller Werte des Zustandes s, also $s(y_1)+s(y_2)+\cdots+s(y_n)$, wenn $y_1,\ldots,y_n$ eine vollständige Liste der Doppelpunkte von D ist.
Man kann diese Definition von $\langle D\rangle$ auch eher rekursiv hinschreiben:

(i) $\langle \bigcirc\rangle = 1$
(ii) $\langle D \amalg \bigcirc\rangle = (-A^{-2}-A^2)\langle D\rangle$
(iii) $\langle D\rangle = A\langle D_1\rangle + A^{-1}\langle D_2\rangle$ wenn D_1 und D_2 aus D enstehen durch Auflösen eines (!) ausgewählten Doppelpunktes in der positiven bzw negativen Weise, wie oben erklärt.

(Dabei bezeichnet $\bigcirc$ ein Diagramm in Form eines Kreises, und $D\amalg\bigcirc$ bezeichnet ein Diagramm, dass sich aus Diagramm D ergibt durch Hinzufügen eines kleinen Kreises in genügend grosser Entfernung von D.) Anders ausgedrückt, aus der obigen Definition von $\langle D\rangle$ ergibt sich leicht, dass die Gesetze (i),(ii),(iii) gelten, und aus den Gesetzen (i),(ii),(iii) kann man leicht die obige Definition von $\langle D\rangle$ rekonstruieren. Dazu merkt Lickorish folgendes

an. Wir erlauben Diagramme ohne Doppelpunkte, zum Beispiel $\bigcirc$, aber wir erlauben nicht gerne das leere Diagramm. (Aus Regeln (i) und (ii) würde sich dafür ergeben $\langle \quad \rangle = (-A^{-2} - A^2)^{-1}$, also kein Laurent-Polynom.)
Wir wollen wissen, ob das Klammerpolynom $\langle D \rangle$ als Verschlingungsinvariante taugt. Dazu untersuchen wir routinemässig das Verhalten unter den Reidemeisterzügen R_I, R_{II}, R_{III}. Es stellt sich heraus: Bei einer Veränderung von D durch Reidemeisterzug R_I ändert sich das Klammerpolynom von D durch Multiplikation mit einem Faktor $-A^{\pm 3}$. (Genaueres nachlesen bei Lickorish oder Sanderson. Oder nachrechnen durch Benutzen der Gesetze (i), (ii), (iii).) Bei einer Veränderung von D durch Reidemeisterzüge R_{II} oder R_{III} ändert sich das Klammerpolynom nicht. Resultat also: Klammerpolynom taugt noch nicht als Verschlingungsinvariante, aber es fehlt nicht viel.
Was da noch fehlt, kann geliefert werden, wenn wir mit orientierten Verschlingungsdiagrammen arbeiten. Sei jetzt also D ein orientiertes Verschlingungsdiagramm. Dann können wir jedem Doppelpunkt y von D eine Zahl $+1$ oder -1 zuordnen, und zwar $+1$, wenn die beiden Richtungsvektoren von D bei y (in der Reihenfolge Überkreuzender/Unterkreuzender) eine positive Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden, sonst -1. Sei $w(D)$ die Summe dieser Zahlen, erstreckt über alle Doppelpunkte des orientierten Diagramms D. Wir nennen $w(D)$ den *Drall* von D (auch *Verwringung*, englisch *writhe*). Wir bemerken, dass $D \mapsto w(D)$ sich ähnlich verhält wie das Klammerpolynom: keine Änderung bei Anwenden von R_{II} und R_{III}, aber eine Veranderung um ± 1 bei Anwenden von R_I. Also versuchen wir es mit der Formel

$$D \mapsto (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}] \ ,$$

die für ein orientiertes Verschlingungsdiagramm D sinnvoll ist (wobei die Abhängigkeit von der Orientierung allerdings gering ist). Es stellt sich dann heraus, routinemässig, dass dieser Ausdruck unter den Reidemeisterzügen R_I, R_{II} und R_{III} unverändert bleibt. Also stellt er eine Invariante für Verschlingungen dar. Aus den Gesetzen (i), (ii), (iii) für das Klammerploynom soll leicht folgen, dass die Potenzen von A, die in diesem Ausdruck auftauchen, immer Potenzen mit geraden Exponenten sind. Ich glaube das. Ausserdem wird behauptet, dass im Falle eines Knotendiagramms (und allgemeiner bei Verschlingungen mit einer ungeraden Anzahl von Komponenten) die Potenzen von A, die in diesem Ausdruck auftauchen, immer Potenzen mit durch-4-teilbaren Exponenten sind. Wir machen deswegen (oder aus anderen Gründen, die mit der Geschichte des Jones-Polynoms zusammenhängen) noch die Ersetzung

$$A \rightsquigarrow t^{-1/4}$$

und erhalten dann das Jones-Polynom. Bezeichnung: $V(D) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$. Re Geschichte: Das Jones-Polynom ist eben älter als das Klammerpolynom und wurde ursprünglich nicht, wie heute üblich, auf dem Umweg über das Klammerpolynom definiert.