11.06.2013

# Notizen zur 8. Vorlesungswoche Knotentheorie SS 2012/13 (Weiss)

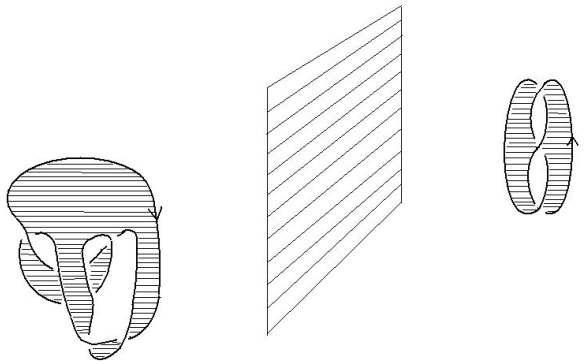
Hauptthema der Woche: Es ging darum, die Formel

$$g(K_1 + K_2) = g(K_1) + g(K_2)$$

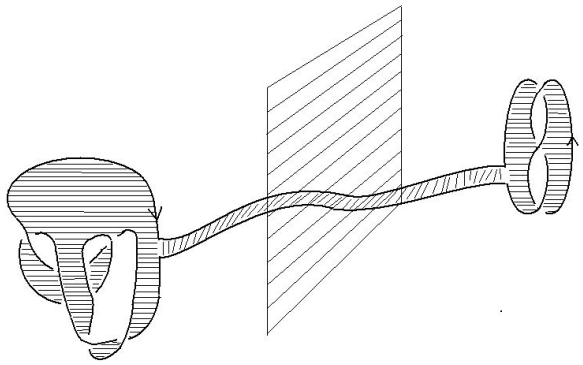
zu beweisen. Dabei sind $K_1$ und $K_2$ Knoten in $\mathbb{R}^3$, mit Knotensumme $K_1 + K_2$, und $g(...)$ bezeichnet das Geschlecht des jeweiligen Knotens (also Minimum der Geschlechter von allen Seifertflächen für den Knoten).
In der Montagsvorlesung haben wir uns auf die Ungleichung

$$g(K_1 + K_2) \leq g(K_1) + g(K_2)$$

konzentriert. Dazu dürfen wir annehmen, dass sich $K_1$ weit links von der $yz$-Ebene befindet und eine Seifertfläche $F_1$ besitzt, die sich ebenfalls weit links von der $yz$-Ebene befindet; weiter, dass sich $K_2$ weit rechts von der $yz$-Ebene befindet und eine Seifertfläche $F_2$ besitzt, die sich ebenfalls weit rechts von der $yz$-Ebene befindet. Bild:



Dann können wir versuchen, eine Seifertfläche $F_3$ für $K_1 + K_2$ zu konstruieren, indem wir $F_1$ und $F_2$ durch ein Band (etwas genauer, durch einen 1-Henkel) verbinden wie in diesem Bild:



Wenn das geht, dann ist nach unserer Henkel-Formel Geschlecht von $F_3$ gleich Geschlecht von $F_1$ plus Geschlecht von $F_2$. Wenn also $F_1$ Seifertfläche für $K_1$ mit minimalem Geschlecht $g(K_1)$ ist und $F_2$ Seifertfläche für $K_2$ mit minimalem Geschlecht $g(K_2)$, dann sehen wir, dass $K_1+K_2$ eine Seifertfläche mit Geschlecht $g(K_1)+g(K_2)$ besitzt. Wir wissen aber noch nicht, ob diese minimales Geschlecht unter den Seifertflächen für $K_1+K_2$ hat; deswegen erhalten wir nur die Ungleichung

$$g(K_1+K_2) \leq g(K_1)+g(K_2) \ .$$

Was könnte uns daran hindern, dieses Band wie oben angedeutet zwischen $F_1$ und $F_2$ zu verlegen? Ich möchte nicht allzusehr in Einzelheiten gehen, aber es ist jedenfalls wichtig, zu wissen, dass $\mathbb{R}^3 \smallsetminus (F_1 \cup F_2)$ zusammenhängend ist (damit wegzusammenhangend, weil offen in $\mathbb{R}^3$). Im wesentlichen ist das Band nämlich ein Weg in $\mathbb{R}^3 \smallsetminus (F_1 \cup F_2)$, der von einem Punkt nahe bei $K_1 = \partial F_1$ (aber nicht in $F_1$) zu einem Punkt nahe bei $K_2 = \partial F_2$ (aber nicht in $F_2$) führt.

**Lemma.** $\mathbb{R}^3 \smallsetminus (F_1 \cup F_2)$ ist zusammenhängend.

*Beweis-Skizze.* Sei $g : \mathbb{R}^3 \smallsetminus (F_1 \cup F_2) \to \{0,1\}$ eine stetige Funktion. Wir müssen zeigen, dass $g$ konstant ist. Für $x \in F_1 \cup F_2$ betrachten wir $g^+(x)$, definiert als der Limes von $g(y)$ wobei $y \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus (F_1 \cup F_2)$ von "oben" gegen $x$ gehen soll; ebenso $g^-(x)$, definiert als der Limes von $g(y)$ wobei $y \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus (F_1 \cup F_2)$ von "unten" gegen $x$ gehen soll. (Weil $F_1 \cup F_2$ orientiert ist, gibt es an jedem Punkt $x$ von $F_1 \cup F_2$, mit Ausnahme vielleicht von Randpunkten, eine Oberseite und eine Unterseite. An Randpunkten $x$ können wir einfach $g^+(x) = g^-(x)$ gleich dem Limes von $g(y)$ setzen, wobei $y \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus (F_1 \cup F_2)$ gegen $x$ gehen soll.) Dann ist die Funktion

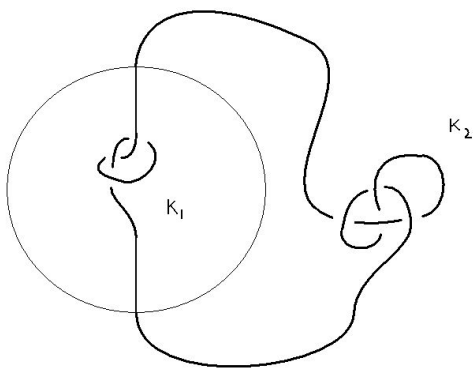
$$x \mapsto g^+(x) - g^-(x)$$

von $F_1 \cup F_2$ nach $\{0, 1, -1\}$ stetig. Sie ist aber auch gleich Null auf $\partial F_1 \cup \partial F_2$. Da jede Zusammenhangskomponente von $F_1 \cup F_2$ Randpunkte enthält, folgt, dass diese Funktion überall gleich Null ist. Also $g^+ = g^-$, also existiert

$$\lim_{y \to x} g(y)$$

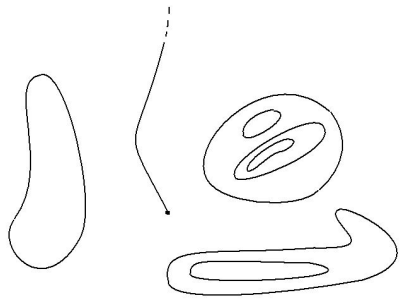
für jedes $x \in F_1 \cup F_2$, und damit ist $g$ stetig fortsetzbar auf ganz $\mathbb{R}^3$, als Funktion $\mathbb{R}^3 \to \{0, 1\}$. Da $\mathbb{R}^3$ zusammenhängend ist, muss $g$ also konstant sein. $\square$

Weiter geht es zum Beweis der Ungleichung $g(K_1 + K_2) \geq g(K_1) + g(K_2)$. Dazu stellen wir uns vor, dass ein Knoten $K$ durch die Einheitssphäre $S^2$ in zwei Stücke $K_1$ und $K_2$ geteilt wird wie im folgenden Bild:

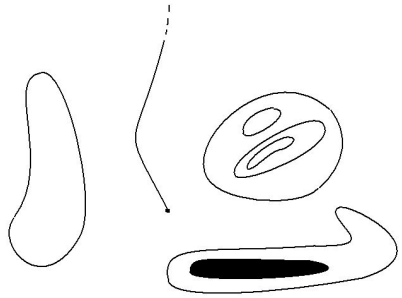



(In der Definition der Knotensumme haben wir die $yz$-Ebene als Trennwand benutzt, aber man kann diese Trennwand ganz gut durch eine grosse Sphäre ersetzen, die einen Knotensummanden einschliesst.) Wie aus dem Bild ersichtlich, ist $K$ transversal zu $S^2$, das heisst an den Schnittpunkten sind die Tangenten von $K$ nicht parallel zu den Tangentialräumen von $S^2$. Sei jetzt $F \subset \mathbb{R}^3$ eine Seifertfläche für $K$ von minimalem Geschlecht $g(K)$. Wir dürfen annehmen, dass $F$ auch transversal zu $S^2$ ist. (Dafür keine genauere Rechtfertigung; Theorie der Transversalität usw.) Transversalität bedeutet in diesem Fall, dass an jedem Punkt $x$ von $F \cap S^2$ der Tangentialraum $T_x F$ nicht gleich $T_x S^2$ ist. (Wir vergleichen hier 2-dimensionalen linearen Unterräume von $\mathbb{R}^3$). Es folgt dann, dass der Durchschnitt $F \cap S^2$ eine glatte kompakte 1-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ ist mit Rand; der Rand besteht natürlich aus den beiden Punkten $p$ und $q$ von $K \cap S^2$ (Nordpol und Südpol). Dann muss $F \cap S^2$ in endlich viele Zusammenhangskomponenten zerfallen. Eine davon ist diffeomorph zu $[0, 1]$ und stellt einen Weg von $p$ nach $q$ dar. Die anderen Zusammenhangskomponenten, sagen wir $C_1, C_2, \ldots, C_r$, sind diffeomorph zu $S^1$, sind also geschlossene Kurven. Es

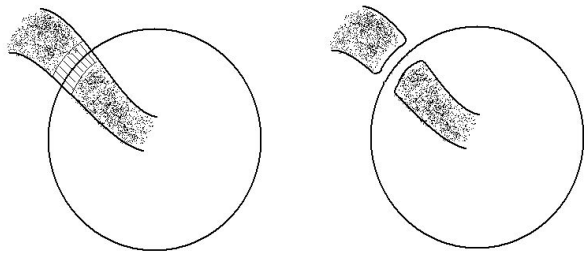
empfiehlt sich, $F \cap S^2$ als Teilmenge (glatte Untermannigfaltigkeit) von $S^2$ zu betrachten. Wir erhalten etwa folgendes Bild. Dabei wird $S^2$ als $\mathbb{R}^2 \cup \infty$ dargestellt in der Weise, dass $p = \infty$ wird und $q = 0$.



Für jede der Kurven $C_i$ hat das Komplement $S^2 \smallsetminus C_i$ zwei Zusammenhangskomponenten (Teil vom Jordan'schen Kurvensatz, oder "Schönflies" in Dimension 2). Wir sagen $C_i < C_j$, falls $C_i$ und der Punkt $p = \infty$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $S^2 \smallsetminus C_j$ liegen. Intuitiv bedeutet das, im Sinne des letzten Bildes, dass $C_i$ von $C_j$ umschlossen wird. Wir wollen jetzt die Situation so verbessern, dass eine der Kurven $C_i$ entfernt wird. Dazu wählen wir $i$ so, dass $C_i$ minimal ist bezüglich der angegebenen Ordnungsrelation. (Im Bild ist $r = 7$ und vier von den sieben Kurven sind minimal.) Wir betrachten $C_i$ als Rand von $M$, wobei $M \subset S^2$ definiert ist als $S^2$ minus die Zusammenhangskomponente von $S^2 \smallsetminus C_i$, die $p = \infty$ enthält. Also ist $M$ diffeomorph zu $D^2$ (wieder Jordan'scher Kurvensatz oder Schönflies). Bild (wobei $M$ schwarz eingefärbt):



Wir verändern jetzt $F$ in der folgenden Weise: ein Gürtel um die Kurve $C_i$ wird entfernt und zwei Kopien von $M$ werden stattdessen eingefügt. (Die Randkurven der zwei Kopien von $M$ werden mit den zwei Randkurven verklebt, die beim Entfernen des Gürtels um $C_i$ entstanden sind. Die Kopien von $M$ sind in Bezug auf das originale $M$ verschoben, eine von $S^2$ nach aussen und die andere nach innen. Ecken sollen abgerundet werden.) Man nennt diese Methode *Chirurgie*. Bild im Querschnitt (linke Seite *vorher*, rechte Seite *nachher*:)



Sei $F'$ die neue orientierte Fläche, die aus $F$ durch Chirurgie enstanden ist. Dann ist immer noch $\partial F' = K$ und $F'$ ist transversal zu $S^2$, und die Anzahl der geschlossenen Kurven in $F' \cap S^2$ ist jetzt $r-1$. In diesem Sinn ist der neue Zustand besser als der vorige. Aber wir sollten erstmal fragen: Ist $F'$ zusammenhängend? Eine Rechnung mit den Henkelformeln (letztes Wochenblatt) ergibt, dass das Geschlecht von $F'$ um eins geringer ist als das von $F$, falls $F'$ überhaupt zusammenhängend ist. Das ist im Widerspruch zu unserer Annahme, dass $F$ minimales Geschlecht hatte unter den Seifertflächen fuer $K$. Also ist $F'$ nicht zusammenhängend. (Es muss dann zwei Zusammenhangskomponenten haben.) Wir entfernen die Zusammenhangskomponente von $F'$, die den Rand $K$ nicht enthält. Sei $F''$ die Fläche, die übrigbleibt. Dann ist $F''$ Seifertfläche für $K$ und man rechnet nach, dass Geschlecht von $F''$ nicht grösser ist als Geschlecht von $F$. Also besteht Gleichheit. Jedenfalls gefällt uns $F''$ besser als $F$, weil der Durchschnitt $F'' \cap S^2$ einfacher aussieht als $F \cap S^2$.
Wir wiederholen diesen Prozess, bis es nicht mehr geht. Demnach haben wir gezeigt: Es gibt eine Seifertfläche $F$ für $K$, deren Geschlecht das Geschlecht von $K$ ist (also minimales Geschlecht unter den Seifertflächen für $K$) und mit den weiteren Eigenschaften:

- $F$ ist transversal zu $S^2$

- $L := F \cap S^2$ ist zusammenhängend und ist demnach diffeomorph zu $[0,1]$. (Mit anderen Worten, $F \cap S^2$ besteht aus einer einzigen, regulären, glatten Kurve in $S^2$, die $p$ mit $q$ verbindet.)

Jetzt betrachten wir $F_1 := F \cap D_3$ und $F_2 := F \smallsetminus \mathrm{int}(D^3)$. Nach Abrundung von Ecken (die bei $p$ und $q$ auftreten) ist $F_1$ eine Seifertfläche für den Knoten $\partial F_1$, der isotop zu $K_1$ ist, und ebenso ist $F_2$ eine Seifertfläche für den Knoten $\partial F_2$, der isotop zu $K_2$ ist. Ausserdem rechnet man nach, dass $g(F_1)+g(F_2) = g(F)$, wobei $g$ für Geschlecht. Also

$$g(K_1) + g(K_2) \leq g(F_1) + g(F_2) = g(F) = g(K) \ .$$