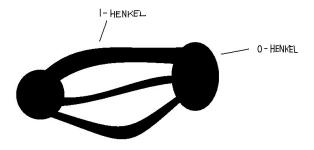
## Notizen zur 7. Vorlesungswoche Knotentheorie SS 2012/13 (Weiss)

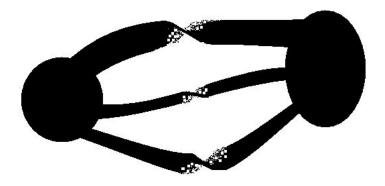
Eine praktische Formel (mit unzureichend definiertem Vokabular) für das Geschlecht g einer (glatten, kompakten, orientierten, zusammenhängenden) Fläche  $F \subset \mathbb{R}^3$  mit nichtleerem Rand  $\partial F$ . Eine solche Fläche besitzt immer eine Henkelzerlegung mit Henkeln vom Index 0 und Henkeln vom Index 1.



Dann ist

$$2-2g\ =\ \#\{0\text{-Henkel}\}-\#\{1\text{-Henkel}\}+\#\{\text{Randkomponenten}\}.$$

Beispiel: Kleeblattknoten K. Wir haben gesehen, dass er Rand einer (kompakten orientierten zusammenhängenden glatten) Fläche aus zwei 0-Henkeln und drei 1-Henkeln ist. Natürlich gibt es genau eine Randkomponente, nämlich K. Das Geschlecht dieser Fläche ist demnach 1.



Wenn Sie etwas mehr von Henkelzerlegungen wissen, dann können Sie vielleicht auch akzeptieren, dass jede glatte, kompakte, orientierte, zusammenhängende Fläche  $F \subset \mathbb{R}^3$  mit oder ohne Rand eine Henkelzerlegung mit Henkeln vom Index 0, 1 und 2 besitzt. Dann ist

$$2-2g = \#\{0\text{-Henkel}\}-\#\{1\text{-Henkel}\}+\#\{2\text{-Henkel}\}+\#\{\text{Randkomponenten}\}.$$

Das kann man auch schreiben als

$$2 - 2g = \chi(F) + \#\{\text{Randkomponenten}\}\$$

wobei  $\chi(F)$  die Euler-Charakteristik ist. Also

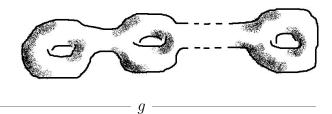
$$\chi(F) = \sum_{j=0}^{2} (-1)^{j} \# \{ j \text{-Henkel} \}.$$

Man kann die Euler-Charakteristik auch über eine Triangulierung der Fläche definieren (wenn man weiss, was das ist):

$$\chi(F) = \#\{\operatorname{Ecken}\} - \#\{\operatorname{Kanten}\} + \#\{\operatorname{Dreiecke}\}.$$

Bemerkung. Die von mir gegebene Definition von Geschlecht einer Fläche war ein Versuch, ehrlich zu sein, ist aber nicht sehr praktisch. Eigentlich sind wir hier ganz und gar auf die Klassifikation der (glatten kompakten, zusammenhängenden, orientierten) Flächen mit oder ohne Rand angewiesen, die leider ohne Beweise benutzt werden soll. Der Hauptsatz besagt:

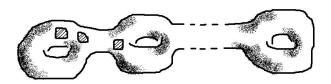
• Zu jedem  $g \geq 0$  gibt es bis auf Diffeomorphismus (umkehrbare differenzierbare Abbildung) genau eine kompakte, zusammenhängende, orientierte Fläche  $F_g$  vom Geschlecht g ohne Rand. Sie sieht so aus:



• Zu jedem  $g \geq 0$  und k > 0 gibt es bis auf Diffeomorphismus genau eine kompakte, zusammenhängende, orientierte Fläche  $F_{g,k}$  vom Geschlecht g mit k Randkomponenten. Man kann sie aus der glatten, zusammenhängenden, orientierten, kompakten Fläche  $F_g$  vom Geschlecht g ohne Rand konstruieren, indem man beliebig k glatte, reguläre, injektive Abbildungen  $\varphi_j \colon D^2 \to F_g$  wählt,  $j = 1, 2, 3, \ldots, k$ , derart, dass die Bilder  $\varphi_j(D^2)$  paarweise disjunkt sind, und dann

$$F_{g,k} := F_g \setminus \bigcup \varphi_j(B^2)$$

setzt. Dabei bezeichnet  $D^2$  die abgeschlossene Einheitsscheibe in  $\mathbb{R}^2$  und  $B^2$  die offene Einheitsscheibe, also  $B^2\subset D^2$ .



**Def.** Geschlecht eines orientierten Knotens K: das minimale g, so dass eine Seifertfläche für K vom Geschlecht g existiert.

Beispiel: wenn ein orientierter Knoten K das Geschlecht 0 hat, dann ist K Rand einer Fläche F in  $\mathbb{R}^3$  vom Geschlecht 0. Dann muss F nach allem,

was oben gesagt wurde, diffeomorph zu einer Scheibe sein. Es folgt (siehe Übungsaufgaben), dass K ein Unknoten ist. Korollar: Alle Knoten K, die eine Seifertfläche vom Geschlecht 1 besitzen, aber nicht isotop zum Unknoten sind, haben das Geschlecht 1.

Summe von orientierten Knoten. Gegeben orientierte Knoten  $K_1$  und  $K_2$ . Wir wollen eine Zusammensetzung  $K_1 + K_2$  von  $K_1$  und  $K_2$  definieren. Sie ist aber nur "bis auf Isotopie" wohldefiniert. Andererseits hängt sie bis auf Isotopie auch nur von den Isotopieklassen von  $K_1$  und  $K_2$  (als orientierte Knoten) ab.

Prozedur: Da wir uns nur für  $K_1$  und  $K_2$  bis auf Isotopie interessieren, dürfen wir annehmen, dass  $K_1$  im linken Halbraum von  $\mathbb{R}^3$  liegt (also links von der yz-Ebene) und  $K_2$  im rechten Halbraum (also rechts von der yz-Ebene). Wir wählen glatte reguläre injektive Abbildungen

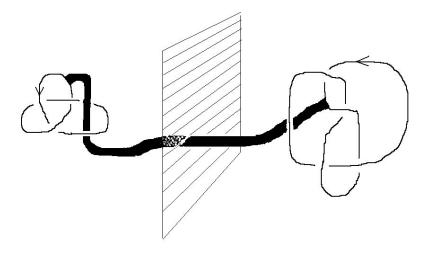
$$f: [0,1] \times [-\varepsilon,\varepsilon] \to \mathbb{R}^3$$

$$g \colon [0,1] \times [-\varepsilon,\varepsilon] \to \mathbb{R}^3$$

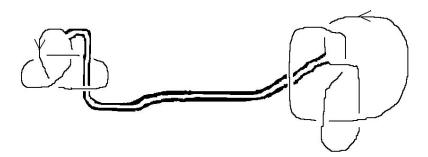
mit den folgenden Eigenschaften:

- f(s,t) = (-s,t,0) und g(s,t) = (s,t,0) für alle  $t \in [-\varepsilon,\varepsilon]$  und alle s nahe bei 0;
- $f(1,t) \in K_1 \text{ und } g(1,t) \in K_2$ ;
- Bild $(f) \cap K_1 = \{f(1,t) \mid t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$ , und df/dt an Stellen (1,t) stimmt mit der Orientierung von  $K_1$  überein;
- Bild $(g) \cap K_2 = \{g(1,t) \mid t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$ , und dg/dt an Stellen (1,t) ist der Orientierung von  $K_2$  entgegengesetzt;
- f(s,t) hat x-Koordinate < 0 für s > 0, t beliebig und g(s,t) hat x-Koordinate > 0 für s > 0, t beliebig.

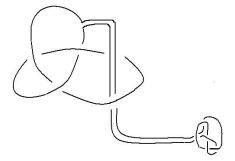
Bild:



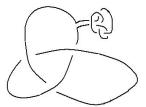
Jetzt entfernen wir alle f(s,t) und g(s,t) mit  $-\varepsilon < t < \varepsilon$ . Das Resultat soll dann  $K_1 + K_2$  sein, bis auf Glättung von vier Ecken. Bild:



Es muss noch gezeigt werden, dass  $K_1+K_2$ , so definiert, nicht abhängt (bis auf Isotopie) von der Wahl von f und g. Dazu veranstalten wir eine vorbereitende Isotopie, die  $K_2$  und das Bild von g einschrumpfen lässt. Nach dieser vorbereitenden Isotopie haben wir folgendes Bild:



Dann lassen wir den Teil des Bildes, der noch von f abhängt, einschrumpfen durch eine weitere Isotopie und erhalten



Jetzt kann man einigermassen sehen, dass die Sache nicht mehr von f abhängt, sondern nur noch von g. Andererseits können wir wegen Symmetrie durch ein ähnliches Argument zeigen, dass es auf die Wahl von g auch nicht ankommt.