17.05.2013

Notizen zur 6. Vorlesungswoche Knotentheorie SS 2012/13 (Weiss)

Direkte Fortsetzung von Notizen zur 5.Vorlesungswoche. Zur Abkürzung: $R = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Satz: *Sei M die volle $s \times s$-Matrix (mit Einträgen in R) der Relationen, die von einem orientierten Verschlingungsdiagramm D bestimmt wird (mit Bögen $X_1, \ldots, X_s$ und Doppelpunkten $p_1, \ldots, p_s$; geschlossene Bögen verboten). Dann gibt es Einheiten $u_1, u_2, \ldots, u_s \in R$, so dass*

$$M \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Betont wurde die Konstruktion der u_i. Nämlich $u_i = (-1)^{j_i}(-t)^{-k_i}$ wobei

- $k_i \in \mathbb{Z}$ der Mittelwert der vier Umlaufzahlen ist, die zu den Regionen angrenzend an p_i gehören;
- $j_i \in \mathbb{Z}$ die Umlaufzahl ist, die vom überkreuzenden Bogen aus gesehen vorne rechts von p_i erscheint.

Bemerkungen: (1) Die Beispiele, die wir zur Illustration betrachtet haben, waren Knotendiagramme. Im allgemeineren Fall von Verschlingungsdiagrammen muss *Umlaufzahl* gelesen werden als eine Summe von Umlaufzahlen entsprechend den Komponenten der Verschlingung.
(2) Es scheint mir nicht wesentlich zu sein, dass wir angrenzend an jeden Doppelpunkt tatsächlich vier verschiedene Regionen (Zusammenhangskomponenten von Komplement des Schattens von D) haben. Es ist auch nicht immer der Fall. Wir haben auf jeden Fall die vier Umlaufzahlen. Sanderson schreibt aber so, als ob es wesentlich ist! Das sollte getestet werden.
(3) Die Definition von k_i benutzt nur den orientierten Schatten von D, während j_i von Überkreuzungs-Information abhängt.
(4) Es ist wichtig, dass wir uns bei der Umwandlung von Relationen in Spalten von M an feste Regeln halten. Die zu p_i gehörende Relation soll in der Form $X - tX - Y + tZ = 0$ geschrieben werden, wobei X den überkreuzenden Bogen bei p_i bezeichnet, Y den in überkreuzender Fahrtrichtung links liegenden Bogen und Z den in überkreuzender Fahrtrichtung rechts liegenden Bogen. Die Beiträge sind also $1 - t$ zur Zeile von X, weiter -1 zur Zeile von Y und t zur Zeile von Z. Sie gehören natürlich auch in die Spalte von p_i. Es wird nicht behauptet, dass X, Y, Z verschieden sind; wo nicht, müssen Beiträge entsprechend aufsummiert werden.

(5) In den Beispielen, die wir betrachtet haben, habe ich Bögen und Doppelpunkte mit Zahlen von 0 bis $s-1$ numeriert (in Übereinstimmung mit Sanderson), nicht wie hier vorgeschlagen mit Zahlen von 1 bis s.

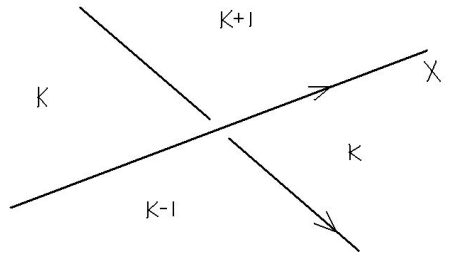
Beweis von Satz (Skizze). Es geht eigentlich nur noch darum, zu zeigen, dass das angegebene Produkt wirklich gleich Null ist. Dazu wählen wir uns einen Bogen X (entsprechend einer Zeile von M) und machen eine Liste der von X besuchten Doppelpunkte, in Durchlaufreihenfolge:

$$p_{\alpha(1)} \quad p_{\alpha(2)} \quad p_{\alpha(3)} \quad \cdots \quad p_{\alpha(r)} \ .$$

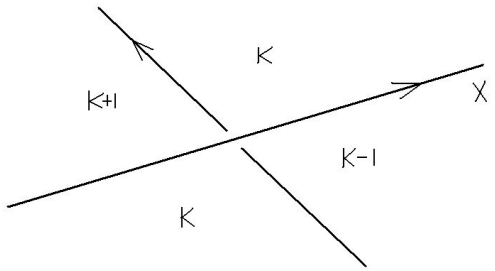
Es wird nicht behauptet oder gefordert, dass diese Doppelpunkte alle verschieden sind. Wir schreiben $b_1, \ldots, b_r \in R$ für die entsprechenden Beiträge zur Zeile von X. Beispielsweise ist $b_1 = -1$, wenn X links vom überkreuzenden Bogen bei $p_{\alpha(1)}$ liegt, sonst $b_1 = t$; ebenso $b_r = -1$ oder $b_r = t$; alle übrigen b_i sind gleich $1-t$. Wir müssen zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^{r} u_{\alpha(i)} b_i = 0 \in R \ .$$

Um das zu zeigen, fassen wir die Summanden $u_{\alpha(i)} b_i$ mit $1 < i < r$ (entsprechend den Doppelpunkten, die von X *überkreuzend* besucht werden), in naheliegender Weise als Summe von zwei Teilen auf: $u_{\alpha(i)} b_i = u_{\alpha(i)} - t u_{\alpha(i)}$. Dabei wollen wir uns aber herausnehmen, diese beiden Teile *Eingangsteil* und *Ausgangsteil* zu nennen, je nach Fall. Wenn nämlich der unterkreuzende Bogen bei $p_{\alpha(i)}$ von links nach rechts kreuzt, dann soll $u_{\alpha(i)}$ der Ausgangsteil sein und $-t u_{\alpha(i)}$ der Eingangsteil. Bild, mit angedeuteten Umlaufzahlen, wobei $k = k_{\alpha(i)}$:



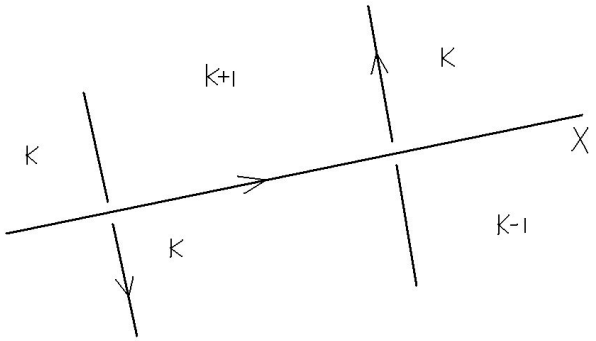
Wenn der unterkreuzende Bogen bei $p_{\alpha(i)}$ von rechts nach links kreuzt, dann soll $u_{\alpha(i)}$ der Eingangsteil sein und $-t u_{\alpha(i)}$ der Ausgangsteil. Bild:



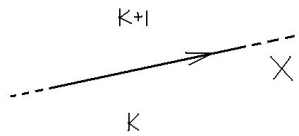
Im Fall $i = 1$ wird noch bestimmt, dass der Eingangsteil Null ist, während der Ausgangsteil alles ist, also $u_{\alpha(1)}b_1$; ähnlich wird im Fall $i = r$ bestimmt, dass der Ausgangsteil Null ist, während der Eingangsteil alles ist, also $u_{\alpha(r)}b_r$. Jetzt muss man sich nur noch (anhand der Zeichnungen) überlegen, dass

$$\text{Eingangsteil von } u_{\alpha(i)}b_i \;=\; -\text{Ausgangsteil von } u_{\alpha(i-1)}b_{i-i}$$

falls $1 < i \leq r$. Hier sollte eine Fallunterscheidung gemacht werden. Wenn wir sehr gründlich sind, sollten es wohl sechzehn Fälle sein: wenn $r > 2$ dann vier mit $i - 1 = 1$, vier mit $i = r$, vier mit $1 < i - 1 < i < r$, und dann noch vier Fälle wenn $r = 2$. Ich führe nur einen vor (vom Typ $1 < i - 1 < i < r$). Bild:



Der linke Doppelpunkt ist p_{i-1} , der rechte ist p_i. Die Zahlen k, $k + 1$ usw sind die Umlaufzahlen, die zu den Regionen des Diagrammkomplements gehören. Der Ausgangsteil von $u_{\alpha(i-1)}b_{i-1}$ ist $u_{\alpha(i-1)} = (-1)^k(-t)^{-k}$. Der Eingangsteil von $u_{\alpha(i)}b_i$ ist $u_{\alpha(i)} = (-1)^{k-1}(-t)^{-k}$.
Dieses Wunder in sechzehn Aufzügen kann man etwas besser verstehen, indem man den zu betrachtenden Diagrammausschnitt variabel gestaltet:



Hier wird nur das Segment von X zwischen Doppelpunkten p_{i-1} und p_i gezeigt; was genau bei p_{i-1} und p_i passiert, wird nicht gezeigt. Man überlegt sich, dass der Ausgangsteil von $u_{\alpha(i-1)}b_{i-1}$ immer gleich $(-1)^k(-t)^{-k}$ ist (vier Fälle) und dass der Eingangsteil von $u_{\alpha(i)}b_i$ immer gleich $(-1)^{k-1}(-t)^{-k}$ ist (auch vier Fälle). $\square$

Um nochmal in Erinnerung zu rufen, wozu der Satz gut sein sollte: Wenn wir eine beliebige Zeile der Matrix M auslassen, haben wir eine Matrix M', die einen R-Homomorphismus $R^s \to R^{s-1}$ bestimmt. Der Cokern davon ist (isomorph zu) $\mathcal{A}(D)$. Nach dem Satz können wir jetzt, ohne den Cokern zu verändern, eine beliebige Spalte von M' auslassen, weil diese Spalte eine Linearkombination (mit Koeffizienten in R) der anderen Spalten ist. Dann haben wir eine $(s-1)\times(s-1)$-Matrix M'', die einen R-Homomorphismus $R^{s-1} \to R^{s-1}$ bestimmt. Der Cokern davon ist also immer noch (isomorph zu) $\mathcal{A}(D)$. Das Fitting-Ideal $\mathcal{E}_1(\mathcal{A}(D))$ ist demnach ein Hauptideal von R, von $\det(M'') \in R$ erzeugt. Wir sind berechtigt, $\det(M'')$ das Alexanderpolynom von D zu nennen; es ist aber nur wohldefiniert bis auf Multiplikation mit $\pm t^{-m}$, beliebiges $m \in \mathbb{Z}$.

Jetzt neues Thema: *Zerlegung von Knoten in Primknoten.* Dazu brauchen wir etwas Theorie von glatten Flächen in $\mathbb{R}^3$.

Def. Eine Teilmenge F von $\mathbb{R}^3$ heisst *glatte Fläche* (mit oder ohne Rand), wenn $\forall x \in F\ \exists$ offene $U, V \subset \mathbb{R}^3$ mit $x \in U$ und Diffeomorphismus (umkehrbare differenzierbare Abbildung)

$$\varphi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^3$$

derart, dass $\varphi(U \cap F) = V \cap S$, wobei S die Standard-Modellfläche

$$\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_2 \geq 0,\ y_3 = 0\}$$

ist (hintere Halbebene). Wenn dabei $\varphi(x)$ die Form $(y_1, 0, 0)$ hat, dann heisst x *Randpunkt* von F, sonst *innerer Punkt.* (Es ist egal, welches/welche φ man

wählt, um diese Unterscheidung zu machen.) Wenn es keine Randpunkte gibt, reden wir (manchmal) von einer *geschlossenen Fläche*. Sonst bilden die Randpunkte den Rand ∂F, den wir eine glatte *Kurve* nennen können (wird aber hier nicht als zusammenhängend vorausgesetzt).

Def. Tangentialraum: Mit Bezeichnungen wie oben ist $T_xF = (d\varphi(x)^{-1})(\mathbb{R}^2)$, ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Dabei ist mit $\mathbb{R}^2$ der lineare Unterraum $\{(y_1, y_2, 0)\}$ von $\mathbb{R}^3$ gemeint, und $d\varphi(x)$ ist das Differential von φ an Stelle x, ein linearer Isomorphismus von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$. (Diese Def von T_xF ist eine Wohl-Definition.)
Eine etwas andere Beschreibung im Fall von $x \notin \partial F$: $v \in \mathbb{R}^3$ gehört zu T_xF genau dann, wenn $\exists$ glatte Kurve $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to F \subset \mathbb{R}^3$ derart, dass $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$.
Bemerkung: Die erste Definition von T_xF funktioniert auch, wenn $x \in \partial F$, und dann ist T_xF trotzdem 2-dimensional.
Sei N_xF das orthogonale Komplement von T_xF in $\mathbb{R}^3$. Also ist N_xF eindimensional. Eine *Orientierung* von F ist eine stetige Auswahl von Einheitsvektoren $n_x \in N_xF$, für alle $x \in F$.

Bemerkung: Eine Orientierung von F bestimmt (*induziert*) eine Orientierung von ∂F, im Sinne von *Durchlaufrichtung*, durch folgende Vereinbarung. An jedem Punkt $x \in \partial F$ gibt es genau einen Einheitsvektor e_x, der tangential zu F und $\perp$ zu ∂F ist und von F nach aussen weist. Dann gibt es genau einen Vektor $v_x \in \mathbb{R}^3$ tangential zu ∂F derart, dass die Vektoren e_x, v_x, n_x (in dieser Reihenfolge) eine positive Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bildet. Die Vektoren v_x geben uns die gewünschte Orientierung von ∂F. Beispiel wurde gegeben: Wenn $F = D^2 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Standardscheibe ist mit der Orientierung, die den nach oben weisenden Normalenvektor $(0, 0, 1)$ wählt, dann ist die induzierte Orientierung von $S^1 = \partial F$ die Standardorientierung (Durchlaufen entgegen dem Uhrzeigersinn).

Def. Sei K ein Knoten in $\mathbb{R}^3$. Eine *Seifertfläche* für K ist eine glatte kompakte zusammenhängende orientierte Fläche F in $\mathbb{R}^3$ mit $\partial F = K$ (wobei das Gleichheitszeichen auch eine Übereinstimmung der Orientierungen bedeuten soll).

Satz. Jeder orientierte Knoten besitzt eine Seifertfläche.

Beweis: Ich bin dem Beweis bei Lickorish gefolgt. Dazu wird der Knoten durch ein Knotendiagramm D dargestellt. Sanderson (Lecture 26) hat denselben Beweis mit mehr Bildern. Siehe auch Wikipedia, *Seifert-Fläche*. *Bemerkung*: Wenn man eine Schachbrettmusterfärbung für das Komplement von D wählt, dann "sieht man" (mit etwas Glück) eine glatte kompakte

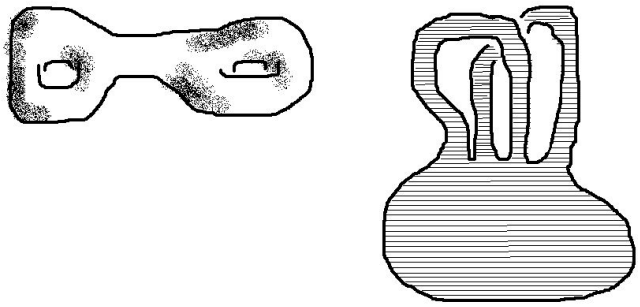
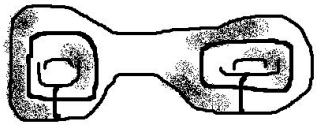
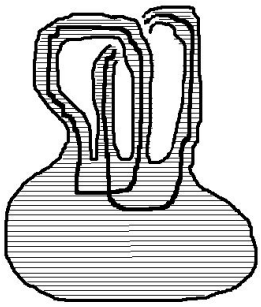
Fläche in $\mathbb{R}^3$, deren Rand K ist. Sie ist aber nicht immer orientierbar. Also muss man sich etwas besseres überlegen.

Wir wollen jetzt fragen, wie "kompliziert" eine Seifertfläche für einen gegebenen Knoten K sein muss. Als Mass für die Komplexität einer Fläche soll dabei das *Geschlecht* der Fläche gelten.

Def. Das *Geschlecht* einer kompakten, glatten, orientierten Fläche F in $\mathbb{R}^3$ (mit oder ohne Rand) ist das Maximum der natürlichen Zahlen k, so dass geschlossene (glatte reguläre zusammenhängende doppelpunktfreie) Kurven

$$C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots, C_{2k-1}, C_{2k}$$

in F existieren mit den folgenden Eigenschaften: wenn $r < s$, dann sind C_r und C_s disjunkt, ausser in den Fällen $s = r + 1$ und s gerade; in diesen Fällen schneiden sich C_r und C_s in genau einem Punkt, mit verschiedenen Tangenten.



Links eine kompakte Fläche vom Geschlecht zwei, ohne Rand (Versuch einer perspektivischen Zeichnung); rechts eine kompakte Fläche vom Geschlecht 1 mit Rand (die Umrisskurve ist der Rand).
Jetzt dasselbe mir eingezeichneten Kurven, die zeigen sollen, dass eine der Flächen das Geschlecht 2 hat, die andere das Geschlecht 1: