12.05.2013

Notizen zur 5. Vorlesungswoche Knotentheorie SS 2012/13 (Weiss)

Für ein orientiertes Verschlingungsdiagramm D wurde der Alexandermodul $\mathcal{A}(D)$ definiert. Es ist ein Modul über dem Ring $R = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, Ring der Laurentpolynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Die Konstruktion erinnert an $\mathrm{Col}(D)$. Es gibt wie üblich zwei Versionen.
Die praktische (aber etwas willkürliche) Definition geht so: Wir wählen uns einen Bogen X_0 im Diagramm aus. Wir definieren dann $\mathcal{A}(D)$ durch Erzeuger und Relationen. Für jeden Bogen X, ausser X_0, wird ein Erzeuger hergenommen, den wir auch X nennen (wenn Kürze gewünscht) oder $[X]$. Für jeden Doppelpunkt des Diagramms gibt es eine Relation: $X - tX = Y - tZ$ oder besser $X - tX - Y + tZ = 0$, wobei X den überkreuzenden Bogen (an diesem Doppelpunkt) bezeichnet, während Y der unterkreuzende Bogen in Fahrtrichtung links (von X aus gesehen) ist, und Z der unterkreuzende Bogen in Fahrtrichtung rechts. Falls in diesen Relationen X_0 auftaucht, muss es durch Null ersetzt werden. Mit anderen Worten: $\mathcal{A}(D)$ ist definiert als der Cokern eines R-Homomorphismus

$$f : R^q \to R^p$$

wobei $p+1$ die Anzahl der Bögen ist und q die Anzahl der Doppelpunkte. (Es ist also praktisch, wenn wir die Bögen durchnumerieren: X_0, X_1, X_2, ..., X_p und ebenso die Doppelpunkte: $1, 2, \ldots, q$ oder $0, 1, 2, \ldots, q-1$.) Dieser R-Homomorphismus f wird natürlich durch eine Matrix gegeben; jede Spalte, entsprechend einem Doppelpunkt, gibt die Relation wieder, die zu dem Doppelpunkt gehört. (Dazu bitte Bemerkungen am Ende von Übungsblatt 5 lesen!! Diese betreffen eher $\mathrm{Col}(D)$, lassen sich aber leicht auf $\mathcal{A}(D)$ übertragen. Beachten, dass Sanderson die Sache etwas anders macht, weil er vielleicht etwas anderes will, $\mathcal{A}(D)$ garnicht definieren will usw. Bitte nicht Kerne mit Cokernen verwechseln.)

Es gibt eine etwas symmetrischere Definition, in der wir nicht damit anfangen, einen Bogen X_0 auszuwählen. Wir definieren ungefähr wie oben einen R-Homomorphismus

$$g : R^q \to R^{p+1}$$

wobei $p + 1$ die Anzahl der Bögen ist und q die Anzahl der Doppelpunkte. Diesmal wird X_0 nicht unterdrückt. Dieser R-Homomorphismus g ist wieder durch eine Matrix gegeben; jede Spalte, entsprechend einem Doppelpunkt, gibt die Relation (von der Form $X - tX - Y + tZ = 0$) wieder, die zu dem

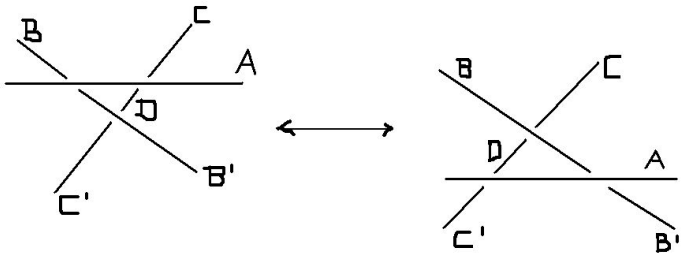
Doppelpunkt gehört. Ausserdem benötigen wir den R-Homomorphismus

$$h : R^{p+1} \to R \ ; \ h(a_0, a_1, \ldots, a_p) = \sum_{j=0}^{p} a_j \ .$$

Dann definieren wir $\mathcal{A}(D)$ als $\ker(h)/\mathrm{im}(g)$. (Man sollte sich dazu überlegen, dass $\mathrm{im}(g)$ in $\ker(h)$ enthalten ist, mit anderen Worten, $g \circ h = 0$. Beide sind Untermoduln von R^{p+1}.)
Um zu zeigen, dass beide Definitionen von $\mathcal{A}(D)$ gleichbedeutend sind, nennen wir sie vorübergehend $\mathcal{A}(D)_I$ und $\mathcal{A}(D)_{II}$. Wir bauen einen R-Modul-Homomorphismus von $\mathcal{A}(D)_{II}$ nach $\mathcal{A}(D)_I$ wie folgt. Jedes Element x von $\mathcal{A}(D)_{II}$ lässt sich durch ein Element $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ von R^{p+1} repräsentieren, mit $\sum_{j=0}^{p} a_j = 0 \in R$. Wir bilden x ab auf das Element von $\mathcal{A}(D)_I = R^p/\mathrm{im}(f)$, das durch $(a_1, \ldots, a_p)$ repräsentiert wird. Man muss sich überlegen, dass das wohldefiniert ist. Umgekehrt: Gegeben y in $\mathcal{A}(D)_I$ repräsentiert durch $(b_1, \ldots, b_p) \in R^p$. Wir bilden x ab auf das Element von $\mathcal{A}(D)_{II} = \ker(h)/\mathrm{im}(g)$, das durch $(-\sum_{j=1}^{p} b_j, b_1, \ldots, b_p)$ repräsentiert wird. Auf diese Weise haben wir einen Isomorphismus von R-Moduln, $\mathcal{A}(D)_I \cong \mathcal{A}(D)_{II}$.

Satz. *Wenn D_0 und D_1 isotope (orientierte) Diagramme sind, also eins aus dem anderen durch Reidemeisterzüge hervorgeht, dann sind die R-Moduln $\mathcal{A}(D_0)$ und $\mathcal{A}(D_1)$ isomorph.*

Das wurde bewiesen. Der Beweis ist schon ein bisschen Routine, also sehr ähnlich dem Beweis des ähnlichen Satzes $\mathrm{Col}(D_0) \cong \mathrm{Col}(D_1)$. Natürlich können wir oBdA sofort annehmen, dass D_1 aus D_0 durch Anwenden von einem einzigen Reidemeisterzug (R_1, R_2 oder R_3) hervorgeht. Die Fälle R_1 und R_2 sind nicht weiter interessant. Ich will hier noch einmal den Fall R_3 beschreiben, weil die Methode inzwischen überzeugender geworden ist. Weil ich eine alte Skizze benutzen will, heissen die Diagramme jetzt P und Q (links P, rechts Q).



Wir überlegen uns zuerst, wie wir die Präsentation von $\mathcal{A}(P)$ vereinfachen können durch Eliminieren von gewissen Erzeugern und Relationen. Die Relationen, die den drei abgebildeten Doppelpunkten entsprechen, sind

$$A - tA = B - tB' \ , \ B' - tB' = D - tC' \ , \ A - tA = C - tD \ .$$

Daraus erhalten wir

$$B = A - tA + tB' \ , \ D = B' - tB' + tC' \ ,$$

$$C = A - tA + tD = A - tA + t(B' - tB' + tC') \ .$$

Damit ist klar, dass wir B, C, D als Erzeuger garnicht mehr brauchen. Wir merken uns aber, wie sie durch A, B', C' ausgedrückt werden können.
Ähnlich erhält man in $\mathcal{A}(Q)$:

$$A - tA = B - tB \ , \ A - tA = D - tC' \ , \ B - tB = C - tD$$

und daraus folgt

$$B = A - tA + tB' \ , \ D = A - tA + tC' \ ,$$

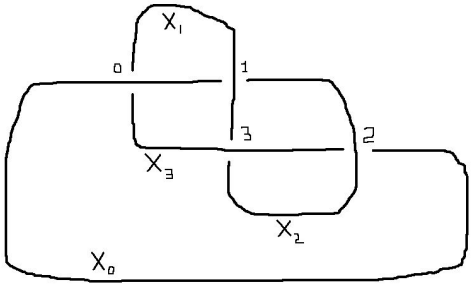
$$C = B - tB + tD = \cdots = A - tA + t(B' - tB' + tC') \ .$$

Daraus wird klar, dass wir einen Modul-Isomorphismus von $\mathcal{A}(P)$ nach $\mathcal{A}(Q)$ machen können durch $A \mapsto A$, $B' \mapsto B'$ und $C' \mapsto C'$. Dann folgt $B \mapsto B$ und $C \mapsto C$ aus den Rechnungen oben. Es folgt nicht $D \mapsto D$, und das wird auch nicht benötigt. Die übrigen Erzeuger, die zu den nicht abgebildeten Bögen von P gehören, bilden wir auch auf die gleichnamigen Erzeuger von $\mathcal{A}(Q)$ ab. $\square$

Weil ausserdem $\mathcal{A}(D)$ endlich präsentiert ist (nach Konstruktion), ist das Ideal $\mathcal{E}_1(\mathcal{A}(D))$ definiert. Es stellt sich heraus: dieses Ideal ist ein Hauptideal. (Jeder Erzeuger heisst *Alexanderpolynom* von D, nach seinem Erfinder

J Alexander. Danach ist das Alexanderpolynom von D nur bis auf Multiplikation mit Einheiten von R wohldefiniert. Diese Einheiten sind $\pm t^n$ für $n \in \mathbb{Z}$.) Das mit dem Hauptideal ist garnicht so leicht zu zeigen, und es soll auch erst nächste Woche geschehen. Genauer: wir können ohne grosse BdA sagen, dass $q = p + 1$, also genauso viele Bögen im Diagramm wie Doppelpunkte (keine geschlossenen Bögen). Dann stellt sich heraus, dass wir in der $p \times q$-Matrix, von der schon die Rede war, eine beliebige Spalte fortlassen können, ohne den "Spaltenraum" zu verkleinern. Das bedeutet, dass auch der Coker unverändert bleibt. Dann ist $\mathcal{A}(D)$ präsentiert durch eine $p \times p$-Matrix, und damit ist $\mathcal{E}_1(\mathcal{A}(D))$ nach Definition das Hauptideal, das von der Determinante dieser Matrix erzeugt wird.

Das alles wurde ausprobiert im Falle eines Diagramms für den Knoten 4_1.



Dabei habe ich mich sehr an die Vorlage in Sanderson gehalten (trotzdem ist es etwas anders geworden). Orientierung des Diagramms ist ersichtlich aus der Numerierung der Doppelpunkte. Die Relationen entsprechend den Doppelpunkten sind dann

$$X_0 - tX_0 - X_1 + tX_3 = 0$$

$$X_1 - tX_1 - X_0 + tX_2 = 0$$

$$X_2 - tX_2 - X_0 + tX_3 = 0$$

$$X_3 - tX_3 - X_1 + tX_2 = 0 \ .$$

Wenn wir $X_0 = 0$ setzen, wird die Matrix also

$$\begin{bmatrix} -1 & 1-t & 0 & -1 \\ 0 & t & 1-t & t \\ t & 0 & t & 1-t \end{bmatrix}$$

(Das ist ungefähr die Transponierte zu der Matrix, die Sanderson hat ... weil er etwas Anderes will.) Wie oben erwähnt, dürfen wir jetzt eine Spalte

auslassen, zB die erste, und erhalten eine 3×3 Matrix.

$$\begin{bmatrix} 1-t & 0 & -1 \\ t & 1-t & t \\ 0 & t & 1-t \end{bmatrix}$$

immer noch mit Einträgen in R. Die Determinante davon ist das Alexanderpolynom von 4_1, also

$$1 - 3t + t^2 \ \in R.$$

Nicht vergessen, dass es nur bis auf Multiplikation mit $\pm t^n$ wohldefiniert ist.