04.05.2013

Notizen zur 4. Vorlesungswoche Knotentheorie SS 2012/13 (Weiss)

Montag. Beispiele zu grossem Satz über $\mathcal{E}_1(M) = \mathcal{E}_1(M, p, q)$, Formulierung siehe Notizen zur dritten Vorlesungswoche. Hierbei ist M ein Modul über einem kommutativen Ring R und p, q ist eine Präsentation von M. Man kann auch sagen: M ist isomorph zu $\operatorname{coker}(q)$ und q ist ein R-Modulhomomorphismus von R^n nach R^m.

(1) Als erstes Beispiel haben wir den naheliegenden Fall $R = \mathbb{Z}$ betrachtet. Dann ist M einfach eine abelsche Gruppe. Ausserdem dürfen wir annehmen, dass M endlich erzeugt ist als abelsche Gruppe. Wir wollen zeigen (unter Benutzung des grossen Satzes): $\mathcal{E}_1(M) = \mathcal{E}_1(M, p, q)$ ist das Nullideal von $\mathbb{Z}$, wenn M nicht endlich ist, und ist gleich dem Ideal $|M| \cdot \mathbb{Z}$, wenn M endliche Ordnung $|M|$ hat. Dazu können wir den Klassifikationssatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen benutzen. Demnach ist M eine direkte Summe von endlich vielen zyklischen Gruppen:

$$M \cong \mathbb{Z}/k_1 \oplus \mathbb{Z}/k_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/k_r$$

wobei $k_1, \ldots, k_r$ nichtnegative ganze Zahlen sind (0 ist erlaubt, 1 ist auch erlaubt, obwohl überflüssig). Dann ist natürlich $M \cong \operatorname{coker}(q)$, wobei der Homomorphismus $q : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^r$ durch eine quadratische (Diagonal-)Matrix

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_r \end{bmatrix}$$

gegeben ist. Also ist $\mathcal{E}_1(M)$ das Hauptideal, das von $\det(q) = \prod k_j$ erzeugt wird. Wenn alle k_j ungleich Null sind, dann ist dieses Produkt die Ordnung von M; sonst ist es eben Null. Letzterer Fall tritt genau dann auf, wenn einer der zyklischen Summanden $\mathbb{Z}/k_j$ unendlich zyklisch ist, also M nicht endlich.

(2) Unser zweites Beispiel war der Fall $R = \mathbb{C}[t]$ (Polynomring) und $M = \mathbb{C}^n$ mit einem $\mathbb{C}$-linearen Endomorphismus $M \to M$ gegeben durch eine $n \times n$-Matrix A. Die Matrix A macht M zu einem Modul über $\mathbb{C}[t]$, weil wir definieren

$$P(t) \cdot v := P(A) \cdot v$$

für ein Polynom $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ und einen Vektor $v \in M$. Dann ist M isomorph (als $\mathbb{C}[t]$-Modul) zu $\operatorname{coker}(q)$, wobei der $\mathbb{C}[t]$-Homomorphismus

$$q : \mathbb{C}[t]^n \longrightarrow \mathbb{C}[t]^n$$

gegeben ist durch die quadratische Matrix

$$A - tI_n$$

die wir hier als Matrix mit Einträgen in $\mathbb{C}[t]$ auffassen. (Mit anderen Worten, wenn Sie in dem $\mathbb{C}[t]$-Modul $\mathbb{C}[t]^n$ die Relationen $t \cdot v = A \cdot v$ erzwingen, wobei $v \in \mathbb{C}[t]^n$ beliebig und wobei t als ein Element von $\mathbb{C}[t]$ aufgefasst wird, dann haben Sie damit einen Modul hergestellt, der isomorph zu M ist. Das ist eigentlich nicht so schwer zu verstehen.)
Demnach ist in diesem Fall $\mathcal{E}_1(M)$ das (Haupt)-Ideal von $\mathbb{C}[t]$, das durch das charakteristische Polynom der Matrix A erzeugt wird.

Die Ideale $\mathcal{E}_1(M) = \mathcal{E}_1(M, p, q)$ heissen übrigens auch *Fitting-Ideale*, nach einem Hans Fitting, wie ich neulich bei Wikipedia gelernt habe. (Es gibt noch hübsche Varianten $\mathcal{E}_r(M)$, die auch nach Fitting benannt sind, die wir hier aber nicht brauchen. Nachlesen bei Lickorish, Def 6.2.)

Beweis des Satzes über $\mathcal{E}_1(M, p, q)$. Wir fangen mit folgenden Bemerkungen an. Sei A eine $m \times n$ Matrix mit Einträgen in R. Sei $J(A)$ das Ideal von R, das von den $m \times m$-Unterdeterminanten von A erzeugt wird. (Beachten: m ist die Anzahl der Zeilen von A.) Wir überlegen uns zuerst:

- Wenn B eine $n \times r$-Matrix mit Einträgen in R ist, dann ist
$$J(AB) \subset J(A).$$
Beachten, dass AB eine $m \times r$-Matrix ist.
- Wenn C eine $m \times s$ Matrix mit Einträgen in R ist, dann ist
$$J\left(\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & I_s \end{bmatrix}\right) = J(A)\ .$$
Beachten, dass die Matrix links eine $(m+s) \times (n+s)$ Matrix sein soll und dass wir an $(m+s) \times (m+s)$-Unterdeterminanten interessiert sind.

Schritt 1. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{E}_1(M, p, q)$ nicht von q abhängt. Also nehmen wir an, dass wir zwei Präsentationen

$$R^{n_1} \xrightarrow{q_1} R^m \xrightarrow{p} M$$

$$R^{n_2} \xrightarrow{q_2} R^m \xrightarrow{p} M$$

von M haben. Dann existiert ein Modulhomomorphismus $f : R^{n_2} \to R^{n_1}$ so, dass $q_2 = q_1 \circ f$. Also können wir die erste der zwei vorbereitenden Bemerkungen anwenden und stellen fest $\mathcal{E}(M, p, q_2) \subset \mathcal{E}(M, p, q_1)$.
Schritt 2. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{E}_1(M, p, q)$ nicht von p abhängt. Also nehmen wir an, dass wir eine Präsentation

$$R^{n_1} \xrightarrow{q_1} R^{m_1} \xrightarrow{p_1} M$$

haben und noch eine andere,

$$R^{n_2} \xrightarrow{q_2} R^{m_2} \xrightarrow{p_2} M \ .$$

Jetzt betrachten wir eine dritte,

$$R^{n_1} \oplus R^{m_2} \xrightarrow{\begin{bmatrix} q_1 & -f \\ 0 & I_{m_2} \end{bmatrix}} R^{m_1} \oplus R^{m_2} \xrightarrow{\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}} M$$

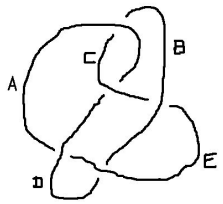
wobei der Modulhomomorphismus $f : R^{m_2} \to R^{m_1}$ so gewählt ist, dass $p_1 \circ f = p_2$. Wegen der zweiten vorbereitenden Bemerkung und Schritt 1 finden wir jetzt, dass

$$\mathcal{E}_1(M, [p_1\, p_2], ...) = \mathcal{E}_1(M, p_1, q_1)$$

und wegen Symmetrie (und Schritt 1) ist das auch $= \mathcal{E}_1(M, p_2, q_2)$. $\square$

Donnerstag: Viele kleine Bemerkungen. Es ging teils um Einzelheiten zur praktischen Berechnung von $\mathrm{Col}(D)$, schon angedeutet in Notizen zur 3ten Woche. Es wurde illustriert mit 5_2 (schon gehabt) und 8_{20}.

- Im Normallfall hat Diagramm genauso viele Bögen wie Doppelpunkte. Schon erklärt in den Notizen zur letzten Woche; *Normalfall* bedeutet, dass jeder Bogen einen Anfang und ein Ende hat (keine *geschlossenen Bögen*). Da wir einen der Bögen unterdrücken, haben wir Präsentation von $\mathrm{Col}(D)$ von der Form $q : \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^{k-1}$. Im Spezialfall Diagramm von 5_2



haben wir die Relationen

$$\begin{aligned} 2A - B - C &= 0, \\ 2C - A - D &= 0, \\ 2B - C &= 0, \\ 2D - A &= 0, \\ -B - D &= 0 \end{aligned}$$

wobei $E = 0$ gesetzt worden ist. Also Matrix von q:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Beachten, dass die Relationen den Spalten entsprechen und die Bögen A,B,C,D den Zeilen.

- Wir bemerken: Die Summe aller Spalten in dieser Matrix ist 0 (aufgefasst als ein Spaltenvektor mit 4 Einträgen). Anders ausgedrückt, die Summe der Einträge in jeder Zeile für sich ist 0. Das gilt allgemeiner für jedes Knotendiagramm (ohne geschlossene Bögen), in dem jeder Bogen genau eine Überkreuzung macht, denn dann ist die Summe der Einträge in jeder Zeile $2 - 1 - 1$ (davon 2 für die Überkreuzung und -1, -1 für Anfangs- und Endpunkt, und sonst Nullen). Das ist gleichbedeutend damit, dass wir ein alternierendes Diagramm haben (Überkreuzungen und Unterkreuzungen wechseln ab, in Durchlaufrichtung). Dieser Fall ist garnicht ungewöhnlich: Tait vermutete um 1900, dass jeder Knoten (bis auf Isotopie) durch so ein alternierendes Diagramm dargestellt werden kann. Er hatte aber unrecht: Der Knoten 8_{20} in der Lickorish-Tabelle ist nicht von dieser Art. (Die Tatsache, dass er in der Tabelle nicht durch so ein Diagramm dargestellt ist, beweist natürlich noch nicht, dass er nicht durch so eines dargestellt werden kann ... es ist aber so.)
  In dem Fall, wo die Summe aller Spalten Null ist, können wir eine beliebige Spalte weglassen. Das Bild (=Spaltenraum der Matrix) und der Cokern des Homomorphismus, der von der Matrix beschrieben wird, ändern sich dadurch nicht. Also haben wir etwa im Beispiel oben $\mathrm{Col}(D) = \mathrm{coker}(q')$ wobei $q' : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^4$ durch die 4×4-Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

  beschrieben wird. Dann ist nach unserem grossen Satz (Ende der Notizen für die letzte Vorlesungswoche)

$$|\mathrm{Col}(D)| = |\det(q')|,$$

  also hat $\mathrm{Col}(D)$ die Ordnung 7 und muss zyklisch sein.
- Wenn das Diagram nicht alternierend ist, müssen wir anders argumentieren. Wie schon in Notizen zur dritten Vorlesungswoche angedeutet: Es ist möglich, die Spalten der Matrix von $q : \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^{k-1}$ mit

± 1 zu multiplizieren, so dass die Summe der Spalten (nach dieser Veränderung) Null wird. Wie wählt man diese Vorzeichen? Da die Spalten den Doppelpunkten entsprechen, müssen wir uns überlegen, wie wir jedem Doppelpunkt einen Faktor ± 1 zuordnen. Dazu wählen wir ein Schachbrettmuster für das Komplement des Diagramms (Existenz gezeigt in Woche 1, Eindeutigkeit ziemlich klar, wenn wir uns verpflichten, die äussere Komponente weiss zu bemalen). An einem Doppelpunkt wählen wir den Faktor $+1$, wenn der überkreuzende Bogen vorne rechts und hinten links ein weisses Feld sieht, sonst -1. (Dabei ist es egal, in welcher Fahrtrichtung wir auf dem überkreuzenden Bogen entlanglaufen.) Wir haben diese Idee schon gesehen bei der Diskussion von Knotenkodierung, erste Vorlesungswoche. Die Vorzeichen sind so gewählt, dass (nach Multiplikation der Spalten mit den entsprechenden Zahlen ± 1) die Doppelpunkte, die von einem Bogen besucht werden, in Durchlaufreihenfolge Beiträge zur Zeile (des Bogens) machen wie

$$+1, -2, +2, -2, +1 \qquad \text{oder} \qquad -1, +2, -2, +2, -2, +1$$

oder ähnlich, und das Entscheidende dabei ist: *abwechselnde* Vorzeichen. Die Summe dieser Beiträge ist deswegen immer Null. (Ich habe vorsichtig *Beiträge* geschrieben statt *Einträge*, weil ein Bogen denselben Doppelpunkt mehrmals besuchen kann; dann addieren sich die entsprechenden Beiträge zu einem Eintrag. Diese Bemerkung betrifft eigentlich ebenso den alternierenden Fall.)

Die Konsequenz ist wieder: Wir können einfach eine beliebige Spalte der Matrix von q fortlassen und erhalten dann $q' : \mathbb{Z}^{k-1} \to \mathbb{Z}^{k-1}$ mit demselben Cokern wie q. Dann ist $|\mathrm{Col}(D)| = |\det(q')|$.

Weitere kleine Bemerkungen:

(1) Sei $C = C_1 \amalg C_2 \subset \mathbb{R}^2$ ein Verschlingungsdiagramm mit zwei Komponenten (was wie üblich nicht *Zusammenhangskomponenten* bedeutet), bei der jede Komponente orientiert ist. Wir können jedem Doppelpunkt von C eine Zahl ± 1 zuordnen, je nachdem, ob die Richtungsvektoren auf den beiden Zweigen (in der Reihenfolge überkreuzender Zweig/unterkreuzender Zweig) eine *positive* Basis von $\mathbb{R}^2$ oder eine negative bilden. Sei $\mathrm{link}(C_1, C_2)$ die Hälfte der Summe dieser Zahlen, erstreckt *nur* über diejenigen Doppelpunkte von D, in denen sich C_1 und C_2 treffen. Aus einer älteren Übungsaufgabe geht hervor, dass $\mathrm{link}(C_1, C_2)$ eine ganze Zahl ist. Es ist leicht zu überprüfen, dass $\mathrm{link}(C_1, C_2)$ eine Isotopieinvariante ist (sich also nicht ändert bei Anwendung von Reidemeisterzügen). Das wurde gemacht. Bemerkung: Wenn wir die Orientierung von C_1 oder von C_2 ändern, dann wechselt $\mathrm{link}(C_1, C_2)$ das Vorzeichen.

Anwendung davon: Die Hopf-Verschlingung ist nicht isotop zur Whitehead-Verschlingung, weil bei der einen $\mathrm{link}(C_1, C_2) = \pm 1$ ist (Vorzeichen abhängig von Orientierung) und bei der anderen $\mathrm{link}(C_1, C_2) = 0$.
(2) Eine Verschlingung V in $\mathbb{R}^3$ bestimmt eine andere Verschlingung mV (m für *mirror image*), nämlich das Bild von V unter einem linearen Isomorphismus $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit negativer Determinante, wie zB

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Wenn V durch ein Verschlingungsdiagramm D beschrieben ist, können wir mV durch das Diagramm mD beschreiben, das aus D hervorgeht, wenn wir an jedem Doppelpunkt den überkreuzenden Zweig zu einem unterkreuzenden machen.
Das gilt speziell für Knoten. In Knotentabellen werden normalerweise Knoten K und ihre Spiegelbilder mK nicht getrennt aufgeführt. Das bedeutet aber nicht, dass K und mK immer isotop sind! Wenn ja, heisst es *amphichiral*, sonst *chiral*. Zum Beispiel ist der Kleeblattknoten 3_1 *nicht* isotop zu seinem Spiegelbild (chiral), während der Achtknoten 4_1 isotop zu seinem Spiegelbild ist (amphichiral). Mehr Einzelheiten bei Sanderson. Wir haben bemerkt: für ein Verschlingungsdiagramm D ist leider immer $\mathrm{Col}(D)$ isomorph zu $\mathrm{Col}(mD)$, so dass unsere bisher entwickelten Methoden zwischen D und mD nicht unterscheiden können. Aus diesem Grund ist es zB schwer, zu zeigen, dass 3_1 chiral ist (und wir haben es bis jetzt nicht gemacht).
(3) Bei einem orientierten Knoten K definieren wir rK als denselben Knoten mit der entgegengesetzten Orientierung. Wieder kann man fragen, ob K isotop ist zu rK (durch eine Isotopie, die die Orientierungen berücksichtigt). Wieder ist die Antwort mal so, mal so. Wenn sie *ja* ist, reden wir von einem *invertierbaren* Knoten (*reversible knot*). Mehr Einzelheiten bei Sanderson.