28.04.2013

Notizen zur 3. Vorlesungswoche Knotentheorie SS 2012/13 (Weiss)

Hauptthema diese Woche: Zu jedem Verschlingungsdiagramm D in $\mathbb{R}^2$ bauen wir eine abelsche Gruppe $\mathrm{Col}(D)$. Die Konstruktion von $\mathrm{Col}(D)$ erinnert stark an die Konstruktion von $\mathcal{F}_n(D)$, hängt aber nicht von n ab und ist aussserdem dual gemeint zur Konstruktion von $\mathcal{F}_n(D)$. Genauer gesagt legen wir es darauf an, folgenden Satz zu haben:

Satz. $\mathcal{F}_n(D) \cong \hom(\mathrm{Col}(D), \mathbb{Z}/n)$ *für jedes* $n \geq 2$.

Dabei ist $\hom(\mathrm{Col}(D), \mathbb{Z}/n)$ die Menge der Homomorphismen von $\mathrm{Col}(D)$ nach $\mathbb{Z}/n$, die natürlich durch punktweise Addition ihrerseits zu einer abelschen Gruppe (oder genauer, zu einem $\mathbb{Z}/n$-Modul) wird. Das Zeichen $\cong$ soll bedeuten, dass hier zwei abelsche Gruppen (oder genauer, $\mathbb{Z}/n$-Moduln) isomorph sind. Auf diese Weise kann man besser verstehen, wie $\mathcal{F}_n(D)$ von n abhängt bei festem D.

Def. $\mathrm{Col}(D)$ hat die Form A_D/B_D. Dabei ist A_D die Menge der formalen Linearkombinationen $\sum_X a_X[X]$ mit der Eigenschaft $\sum_X a_X = 0$, wobei X für Bögen von D steht und die Koeffizienten a_X ganze Zahlen sind. Die Menge A_D wird eine abelsche Gruppe durch koeffizentenweise Addition von solchen Linearkombinationen. Ausserdem ist B_D die kleinste Untergruppe von A_D , die alle Ausdrücke der Form $2[Y] - [X] - [Z]$ enthält, wobei wir annehmen, dass Y ein Bogen ist, der an einem Doppelpunkt von D Bögen X und Z *über*kreuzt. (Bild sollte gemacht werden.)
Eine etwas andere Beschreibung: Wir suchen uns einen Bogen X_0 von D aus. Dann kann $\mathrm{Col}(D)$ beschrieben werden als A'_D/B'_D. Dabei ist A'_D die Menge (abelsche Gruppe) der formalen Linearkombinationen $\sum_X a_X[X]$ mit Koeffizienten a_X in $\mathbb{Z}$. Ausserdem ist B'_D die kleinste Untergruppe von A'_D , die erstens das Element $[X_0]$ enthält und zweitens alle Ausdrücke der Form $2[Y] - [X] - [Z]$ (wie oben, entsprechend den Doppelpunkten von D).
Kleine Übung: zeigen, dass diese beiden Definitionen von $\mathrm{Col}(D)$ *tatsächlich isomorph sind.*

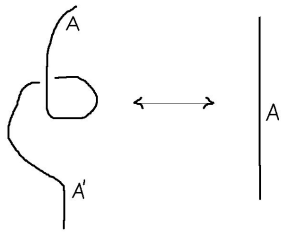
Beweis vom obenstehenden Satz. Wir benutzen die Beschreibung von $\mathrm{Col}(D)$ als A'_D/B'_D. Dann ist klar, dass ein Homomorphismus von $\mathrm{Col}(D)$ nach $\mathbb{Z}/n$ dasselbe ist, wie ein Homomorphismus von A'_D nach $\mathbb{Z}/n$, dessen Einschränkung auf B'_D gleich Null ist. Ein Homomorphismus φ von A'_D nach $\mathbb{Z}/n$ ist aber gleichwertig zu einer Funktion f von der Menge der Bögen von D nach $\mathbb{Z}/n$. Und zwar ist die Einschränkung von φ auf B'_D genau dann Null, wenn das entsprechende f die Eigenschaften $f[X_0] = 0$ hat und ausserdem $2f[Y] - f[X] - f[Z] = 0$ gilt, wann immer Y ein Bogen von D

ist, der an einem Doppelpunkt von D Bögen X und Z überkreuzt. Also haben wir $\mathrm{Col}(D)$ identifiziert mit der abelschen Gruppe der Funktionen f von der Menge der Bögen von D nach $\mathbb{Z}/n$, die die Eigenschaften $f[X_0] = 0$ und $2f[Y] - f[X] - f[Z] = 0$ haben (wobei angenommen wird, dass Y ein Bogen von D ist, der an einem Doppelpunkt Bögen X und Z usw usw). Das war eine unserer Beschreibungen von $\mathcal{F}_n(D)$. □

Korollar. *Wenn D_0 und D_1 isotope Diagramme sind (also das eine aus dem anderen durch endlich viele Reidemeister-Züge hervorgeht), dann ist* $\mathrm{Col}(D_0)$ *isomorph zu* $\mathrm{Col}(D_1)$.

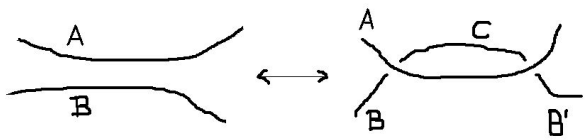
Beweis. Nach Konstruktion sind $\mathrm{Col}(D_0)$ und $\mathrm{Col}(D_1)$ endlich erzeugte abelsche Gruppen. Nach dem Klassifikationssatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen lassen sich beide schreiben als endliche direkte Summen von zyklischen Gruppen (wobei $\mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition auch als zyklische Gruppe zählt). Daraus kann man leicht sehen: wenn $\mathrm{Col}(D_0)$ nicht isomorph ist zu $\mathrm{Col}(D_1)$, dann gibt es ein n derart, dass $\hom(\mathrm{Col}(D_0), \mathbb{Z}/n)$ nicht isomorph ist zu $\hom(\mathrm{Col}(D_1), \mathbb{Z}/n)$. Dann ist also $\mathcal{F}_n(D_0)$ nicht isomorph zu $\mathcal{F}_n(D_1)$ für dieses n. Dann wissen wir, dass D_0 und D_1 nicht isotop sein können, also Widerspruch zur Annahme. □

Weil ich diese Argumentation (vom Korollar) nicht besonders erleuchtend fand, habe ich nochmal einen direkten Beweis von der Aussage des Korollars skizziert. Er geht ungefähr genauso wie der Beweis der Isotopieinvarianz von $\mathcal{F}_n(D)$. Wir haben also drei Fälle zu behandeln. Die Diagramme sollen jetzt P und Q heissen (statt D_0 und D_1), und die Bögen A, B usw, weil ich die alten Beweise und Bilder wiederbenutzen möchte.
Fall 1. Hier nehmen wir an, dass Q aus P durch Reidemeisterzug R_1 hervorgeht (Entfernen einer Schlaufe in diesem Fall).

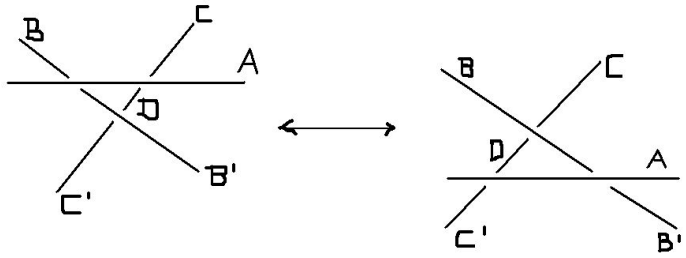


Wir bemerken, dass $[A] = [A']$ gelten muss in $\mathrm{Col}(P)$, weil $2[A] = [A'] + [A]$. Also können wir einen Isomorphismus von $\mathrm{Col}(P)$ nach $\mathrm{Col}(Q)$ machen, indem wir das Element $[A]$ alias $[A']$ von $\mathrm{Col}(P)$ auf das Element $[A]$ von $\mathrm{Col}(Q)$ abbilden und $[B]$ auf $[B]$ für andere Bögen B, die in P so heissen wie in Q.

Fall 2. Hier nehmen wir an, dass Q aus P durch Reidemeisterzug R_2 hervorgeht.



Wir bemerken, dass in $\mathrm{Col}(Q)$ die Gleichung $[B] = [B']$ gelten muss, weil $[C] = 2[A]-[B]$ und auch $[C] = 2[A]-[B']$. Also können wir einen Homomorphismus von $\mathrm{Col}(P)$ nach $\mathrm{Col}(Q)$ machen, indem wir $[A]$ auf $[A]$ abbilden und $[B]$ auf $[B]$ alias $[B']$, ausserdem $[X]$ auf $[X]$ für andere Bögen X, die in P so heissen, wie in Q. Es ist dann leicht zu zeigen, dass dieser Homomorphismus bijektiv ist; speziell ist $[C]$ im Bild, weil $[A]$ und $[B]$ im Bild sind und $[C] = 2[A] - [B]$ in $\mathrm{Col}(Q)$.
Fall 3. Hier nehmen wir an, dass Q aus P durch Reidemeisterzug R_3 hervorgeht.



Wir wollen einen Isomorphismus von $\mathrm{Col}(P)$ nach $\mathrm{Col}(Q)$ machen, indem wir $[A]$ auf $[A]$, $[B]$ auf $[B]$, $[B']$ auf $[B']$, $[C]$ auf $[C]$ und $[C']$ auf $[C']$ abbilden, und alle nicht abgebildeten Bögen in P auf die gleichnamigen Bögen in Q. Wir bilden aber nicht ohne weiters $[D]$ in $\mathrm{Col}(P)$ auf $[D]$ in $\mathrm{Col}(Q)$ ab.

Sondern weil in $\mathrm{Col}(P)$ gilt, dass

$$[D] = 2[B'] - [C'] = 2[A] - [C]$$

müssen wir $[D]$ in $\mathrm{Col}(P)$ abbilden auf $2[B'] - [C']$ in $\mathrm{Col}(Q)$, und ebenfalls auf $2[A] - [C]$ in $\mathrm{Col}(Q)$. Damit es nicht so etwas Verbotenes wie eine mehrdeutige Abbildung wird, müssen wir also erstmal zeigen, dass

$$2[B'] - [C'] = 2[A] - [C]$$

gilt in $\mathrm{Col}(Q)$. Tatsächlich gilt das, usw. $\square$

Bei der Bestimmung von $\mathrm{Col}(D)$ in Einzelfällen haben sich folgende Bemerkungen als nützlich herausgestellt.

• Es ist praktisch, die Definition von $\mathrm{Col}(D)$ als A'_D/B'_D zu benutzen.

• In den meisten Fällen ist die Anzahl der Bögen von D gleich der Anzahl der Doppelpunkte. Denn wenn man die Komponenten von D orientiert, kann man eine Bijektion von der Menge der Bögen in die Menge der Doppelpunkte machen, indem man jedem Bogen seinen "Anfangs-Doppelpunkt" zuordnet. (Wann geht es schief? Es geht schief, wenn Bögen keinen Anfangspunkt haben.) Dieses Argument kommt von Sanderson.

• Im Normalfall haben wir also k Relationen von der Form

$$2[Y] - [X] - [Z] = 0$$

und $k-1$ Erzeuger entsprechend den Bögen, mit Ausnahme des speziell ausgewählten Bogens X_0 . (Wenn in den Relationen $[X_0]$ auftaucht, muss man das durch Null ersetzen.) Also können wir $\mathrm{Col}(D)$ beschreiben als Cokern (Zielgruppe modulo Bilduntergruppe) eines Homomorphismus von $\mathbb{Z}^k$ nach $\mathbb{Z}^{k-1}$, der durch eine Matrix V mit $k-1$ Zeilen und k Spalten gegeben ist (Einträge aus $\mathbb{Z}$).

• Im Normalfall ist jede Spalte in V eine Linearkombination der anderen Spalten mit Koeffizienten ± 1. Mehr Einzelheiten dazu gibt es in Woche 4. Wenn das so ist, dann kann man eine beliebige Spalte von V fortlassen, und hat jetzt $\mathrm{Col}(D)$ als Cokern eines Homomorphismus $\mathbb{Z}^{k-1} \to \mathbb{Z}^{k-1}$ beschrieben, der durch eine *quadratische* Matrix W mit $k-1$ Zeilen und $k-1$ Spalten gegeben ist (Einträge aus $\mathbb{Z}$).

• In diesem Fall gilt, dass die Ordnung (Anzahl der Elemente) von $\mathrm{Col}(D)$ gleich $|\det(W)|$ ist in den Fällen, wo $\det(W) \neq 0$ oder Ordnung von $\mathrm{Col}(D)$ endlich. Wir kriegen das in der kommenden Woche als Spezialfall von einem grösseren Satz aus dem KönigInnenreich der Algebra.

Ich habe dann gleich noch diesen grösseren Satz beschrieben, bin aber nicht mehr zum Beweis (oder zu ernsten Beispielen) gekommen. Sei also R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Wir wollen annehmen, dass es

möglich ist, Modulhomomorphismen

$$R^n \xrightarrow{q} R^m \xrightarrow{p} M$$

zu finden derart, dass das Bild von q gleich dem Kern von p ist und das Bild von p ganz M ist. Das ist nur eine umständliche Art, zu sagen, dass M als R-Modul isomorph ist zum Cokern von q. (Und deshalb ist es für uns eine wichtige Situation, weil diese Cokerne gerade oben aufgetaucht sind, mit $R = \mathbb{Z}$.) Der Modulhomomorphismus q lässt sich automatisch durch eine $m \times n$-Matrix W mit Einträgen in R beschreiben.

Def. Sei $\mathcal{E}_1(M, p, q)$ das Ideal von R, das von den $m \times m$-Unterdeterminanten von W aufgespannt wird.
(Genauer, wir können auf $\binom{n}{m}$-erlei Weise m von den n Spalten von W aussuchen und daraus eine $m \times m$-Matrix machen; diese hat eine Determinante in R. Dann soll $\mathcal{E}_1(M, p, q)$ das kleinste Ideal von R sein, das alle diese Determinanten enthält.)

Beispiele. Wenn $n < m$ ist, dann ist $\mathcal{E}_1(M, p, q)$ das Nullideal von R. Wenn $n = m$ ist, dann ist $\mathcal{E}_1(M, p, q)$ das Hauptideal von R, das von $\det(W)$ erzeugt wird.
Im Fall $M = 0$ können wir $m = n$ wählen und $q = \mathrm{id} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Dann ist natuerlich $\det(q) = 1$, falls $m > 0$ war, also $\mathcal{E}_1(M, p, q) = R$. Wenn $m = 0$, erhebt sich die Frage, was die Determinante einer 0×0-Matrix sein soll. Am besten *definieren* wir auch in diesem Fall $\mathcal{E}_1(M, p, q) = R$.

Satz. *Das Ideal $\mathcal{E}_1(M, p, q)$ hängt nur von M ab, dagegen nicht von der Wahl von p und q.*

Def. Die Konstellation bestehend aus Modulhomomorphismen $p : R^m \to M$ und $q : R^n \to R^m$ mit den oben beschriebenen Eigenschaften heisst eine *endliche Präsentation von M*. Wenn es so etwas gibt, was nicht immer der Fall ist, dann sagt man, dass der R-Modul M *endlich präsentierbar* ist.