21.04.2013

Notizen zur 2. Vorlesungswoche Knotentheorie SS 2012/13 (Weiss)

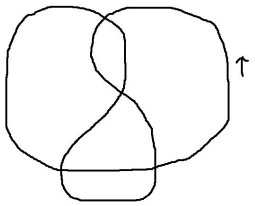
Es war von der ersten Woche noch etwas übriggeblieben zum Thema Kodierung von Schatten und Knotendiagrammen. Ein Knotendiagramm ist ein Schatten D mit Zusatzinformation betreffend Überkreuzungen. Zur Kodierung des Schattens wählen wir wie üblich eine Parametrisierung

$$f : S^1 \to D$$

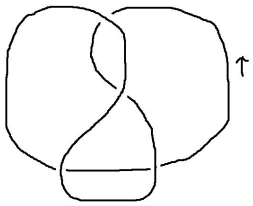
und numerieren die Elemente von S^1, die unter f auf Doppelpunkte von D abgebildet werden, in Durchlaufreihenfolge. Wie in den Notizen zur ersten Woche erklärt, erhalten wir dann eine Liste von geraden Zahlen mit Orientierungsdaten, wie zum Beispiel

$$6^s \ 8 \ 2^s \ 4$$

im Falle des Diagramms



Wir wollen jetzt noch angeben, welcher Zweig an jedem Kreuzungspunkt oben ist. Wenn der Zweig mit der geraden Nummer oben ist, wird nichts dazugeschrieben; wenn der Zweig nit der ungeraden Nummer oben ist, schreiben wir ein Minuszeichen vor die entsprechende Zahl. Also, wenn unser Knotendiagramm wie folgt aussieht



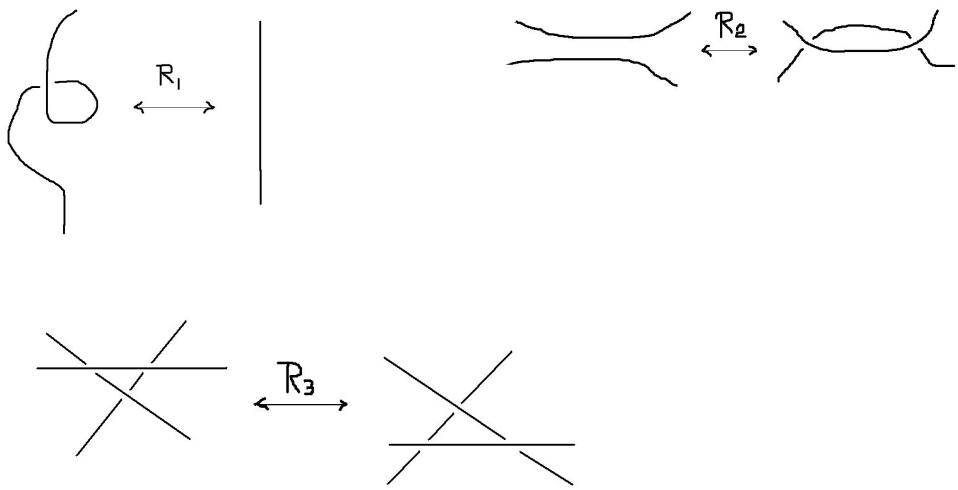
dann ist der Kode dafür $6^s \ -8 \ -2^s \ 4$.
(Es geht hier nicht um Subtraktion oder Addition! Die Minuszeichen dienen einfach nur als Infoträger. Ausserdem ist es hier erstmal egal, ob das Knotendiagramm einen interessanten Knoten beschreibt oder nicht. Im Beispiel oben ist es ein Knoten, der isotop zum Unknoten ist, also ziemlich uninteressant. Es ist nicht der Achtknoten, der auch mit 4_1 bezeichnet wird.)

Diese Bemerkungen zur Kodierung von Schatten und Knotendiagrammen waren zur Einstimmung gedacht. Sie koennen nützlich sein, wenn man Knotendiagramme in einen Computer eingeben will usw. usw. Ausserdem illustrieren sie ganz gut, was wir mit *Ähnlichkeit* von Knotendiagrammen meinen. Wenn zwei Knotendiagramme ähnlich sind, dann haben sie denselben Kode (bis auf die Mehrdeutigkeiten, die dadurch entstehen, dass wir eine Durchlaufrichtung wählen und einen Anfangspunkt im Diagramm). Die Umkehrung gilt fast ... (*präzisieren, wenn gewünscht*).

Nach dieser Einstimmung haben wir uns wieder der ernsteren Knoten- und Verschlingungstheorie zugewandt. Die grundlegenden Definitionen sind schon gegeben (Isotopie von Knoten, Isotopie von Verschlingungen, Ähnlichkeit von Knoten- oder Verschlingungsdiagrammen). Jetzt ein Satz von Reidemeister (1932).

Satz. (i) *Jede Verschlingung K (in $\mathbb{R}^3$) ist isotop zu einer, die von einem Verschlingungsdiagramm (in $\mathbb{R}^2$) herrührt.*
(ii) *Zwei Verschlingungsdiagramme D_0 und D_1 (in $\mathbb{R}^2$) bestimmen genau dann isotope Verschlingungen (in $\mathbb{R}^3$), wenn D_1 aus D_0 durch endlich viele Veränderungen der Form R_0, R_1, R_2, R_3 entsteht. Diese elementaren Veränderungen (Reidemeister-Züge) sind die folgenden:*

> R_0*: Ersetzen eines Verschlingungsdiagramms durch ein ähnliches (im Sinne von Definition* Ähnlichkeit*, siehe Notizen zur ersten Vorlesungswoche).*



(Die Zeichnungen zu R_1 und R_3 sind nicht ganz vollständig, weil es auch so etwas wie spiegelverkehrte Varianten von R_1 und R_3 gibt, die man ebenfalls hinmalen sollte. Nachschauen bei Sanderson. Ausserdem sollte man bemerken, dass R_0 hier einen Spezialstatus hat, weil R_i für $i = 1, 2, 3$ nur wohldefiniert ist bis auf Anwenden von R_0.) Teil (i) des Satzes hatte ich schon in der ersten Woche ohne Beweis zitiert. Leider werden wir auch Teil (ii) in dieser Vorlesung nicht beweisen! Der Beweis ist mittelschwer. Heutzutage würde man das als eine Anwendung von Transversalität (eine Theorie der allgemeinen Lage innerhalb der Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten) sehen.

Im Zusammenhang mit dem Satz von Reidemeister ist die folgende Definition verständlich, bleibt aber gefährlich:

Def. Zwei Verschlingungsdiagramme D_0 und D_1 (in $\mathbb{R}^2$) sollen *isotop* genannt werden, wenn D_1 aus D_0 durch endlich viele Veränderungen der Typen R_0, R_1, R_2, R_3 hervorgeht.

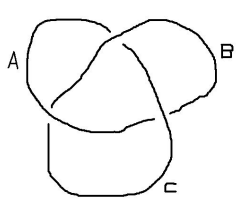
Nach dem Satz von Reidemeister sind D_0 und D_1 also genau dann isotop als Diagramme, wenn ihre zugehörigen Verschlingungen in $\mathbb{R}^3$ isotop sind. (Das Gefährliche an dieser Definition besteht darin, dass man Isotopie von Diagrammen mit Ähnlichkeit von Diagrammen verwechseln könnte.) Der Satz von Reidemeister ist gerade in der modernen Knotentheorie sehr wichtig und

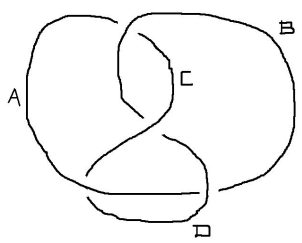
wird oft nach folgendem Schema benutzt. Gegeben sei ein Knotendiagramm oder allgemeiner ein Verschlingungsdiagramm D. Man konstruiert direkt aus dem Diagramm irgendeine algebraische Struktur $\Phi(D)$ oder irgendeine "Zahl" $\Phi(D)$. Meistens ist klar, dass $\Phi(D) = \Phi(D')$ oder $\Phi(D) \cong \Phi(D')$ für ähnliche Diagramme D und D'. Dann zeigt man, dass $\Phi(D)$ gleich $\Phi(D')$ ist oder isomorph zu $\Phi(D')$, usw., wenn D' aus D durch eine Veränderung vom Typ R_1, R_2, oder R_3 hervorgeht. Damit ist gezeigt, dass $\Phi(D)$ nur von der Isotopieklasse des Verschlingungsdiagramms D abhängt, ggf. bis auf Isomorphismus. Also kann man auch sagen: $\Phi(D)$ hängt nur (ggf. bis auf Isomorphismus) von der Isotopieklasse der Verschlingung ab, die durch D bestimmt wird. Daher: wenn D und E Verschlingungsdiagramme sind und $\Phi(D)$ *nicht* gleich/isomorph zu $\Phi(E)$ ist, dann sind die zu D und E gehörenden Verschlingungen in $\mathbb{R}^3$ *nicht* isotop.

In diesem Geist haben wir die Färbungsmoduln $\mathcal{F}_n(D)$ eines Verschlingungsdiagramms D definiert, für $n > 1$. Dabei ist $\mathcal{F}_n$ ein Modul über dem Ring $\mathbb{Z}/n$. Wir definieren dazu zuerst

$$\hat{\mathcal{F}}_n(D)$$

für festes n. Dazu brauchen wir den Begriff *Bogen* (englisch *arc*) in einem Verschlingungsdiagramm D. Die Bögen sind grob gesprochen die Teilkurven von D, die von einer Unterkreuzung zur nächsten Unterkreuzung führen (bei Überkreuzungen nicht Halt machen). In den folgenden Beispielen von Knotendiagrammen ist die Zahl der Bögen 3 bzw 4, und sie sind mit Grossbuchstaben bezeichnet.





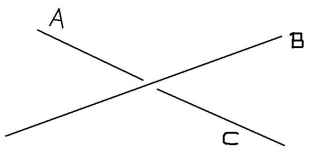
Die Elemente von $\hat{\mathcal{F}}_n(D)$ sind die Abbildungen

$$f : \text{Menge der Bögen von } D \longrightarrow \mathbb{Z}/n$$

die an jedem Doppelpunkt von D die Gleichung

$$2f(B) = f(A) + f(C)$$

erfüllen, wobei B den überkreuzenden Bogen bezeichnet:



Mit anderen Worten: $\hat{\mathcal{F}}_n(D)$ ist die Menge der Lösungen des linearen Gleichungssystems, das wir erhalten, wenn wir für jeden Doppelpunkt von D die Gleichung $2f(B) - f(A) - f(C) = 0$ hinschreiben, mit Bezeichnungen wie oben. Die Unbekannten des Gleichungsystems sind also die Zahlen

$$f(A) \in \mathbb{Z}/n$$

entsprechend den Bögen A des Diagramms D. Die Zahl der Gleichungen ist die Zahl der Doppelpunkte von D. Es ist klar, dass diese Lösungsmenge ein $\mathbb{Z}/n$-Modul ist, nämlich ein Untermodul von $(\mathbb{Z}/n)^b$, wobei b die Zahl der Bögen von D ist.
Jetzt bemerken wir noch, dass jede *konstante* Abbildung

$$f : \text{Menge der Bögen von } D \longrightarrow \mathbb{Z}/n$$

ein Element von $\hat{\mathcal{F}}_n(D)$ ist, denn $2f(B) - f(A) - f(C) = 0$ ist bestimmt immer erfüllt, wenn $f(A) = f(B) = f(C)$. Also können wir definieren

$$\mathcal{F}_n(D) := \frac{\hat{\mathcal{F}}_n(D)}{\{\text{konstante Abb.}\}}$$

Satz. *Wenn P und Q isotope Verschlingungsdiagramme sind, dann sind $\mathcal{F}(P)$ und $\mathcal{F}(Q)$ isomorphe $\mathbb{Z}/n$-Moduln.*

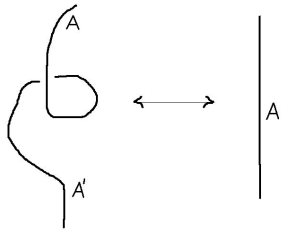
Beweis. Es genügt, zu zeigen: Wenn Q aus P durch eine einzige der Veränderungen R_1 , R_2 , R_3 entsteht, dann ist

$$\hat{\mathcal{F}}_n(P) \;\cong\; \hat{\mathcal{F}}_n(Q)$$

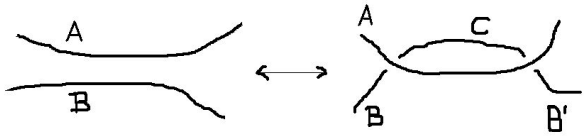
durch einen Isomorphismus, der die Konstanten auf die Konstanten abbildet. Wir bezeichnen den zu konstruierenden Isomorphismus durch

$$f \mapsto \bar{f} \ .$$

Wir haben also drei Fälle zu betrachten (und in jedem der drei Fälle steht das linke Bild für P, das rechte für Q).
Fall R_1 :



Wir bemerken, dass $f(A) = f(A')$ sein muss, weil $2f(A) = f(A') + f(A)$. Also können wir definieren $\bar{f}(A) = f(A) = f(A')$ und $\bar{f}(X) = f(X)$ für die nicht gezeigten Bögen X (die, wenn wir sie zeigen wollten, in Diagramm Q so aussehen und bezeichnet sind, wie in Diagramm P). Es ist klar, dass $f \mapsto \bar{f}$ eine lineare Bijektion ist und dass $\bar{f}$ konstant ist, wenn f konstant ist. Fertig.
Fall R_2 :



Wir wollen $\bar{f}(A) = f(A)$ und $\bar{f}(B) = f(B) = \bar{f}(B')$ setzen, damit wir $\bar{f}(X) = f(X)$ setzen können für alle nicht gezeigten Bögen X (die in Diagramm Q so aussehen und bezeichnet sind, wie in Diagramm P). Dann sind wir gezwungen, $\bar{f}(C) = 2f(A) - f(B)$ zu setzen (aufgrund von zwei Gleichungen, die zu den beiden neuen Doppelpunkten in Diagramm Q gehören). Wir tun das und haben damit $\bar{f}$ definiert. Die Abbildung $f \mapsto \bar{f}$ ist injektiv und linear. Sie ist auch surjektiv, denn wenn

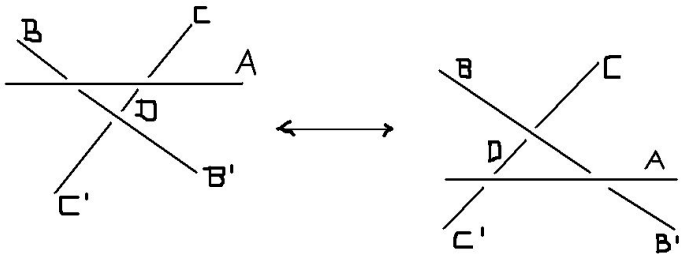
$$g \in \hat{\mathcal{F}}_n(Q)$$

gegeben ist, muss gelten

$$g(B) = 2g(A) - g(C) = g(B')$$

also $g(B) = g(B')$ und $g = \bar{f}$ für dasjenige $f \in \hat{\mathcal{F}}_n(P)$, das durch $f(A) = g(A)$ und $f(B) = g(B) = g(B')$ und $f(X) = g(X)$ für die übrigen Bögen

gegeben ist.
Fall R_3 :



Wir wollen wieder $\bar{f}(A) = f(A)$, $\bar{f}(B) = f(B)$, $\bar{f}(B') = f(B')$, $\bar{f}(C) = f(C)$ und $\bar{f}(C') = f(C')$ setzen, damit wir $\bar{f}(X) = f(X)$ setzen können für alle anderen Bögen X (die in Diagramm Q so aussehen und bezeichnet sind, wie in Diagramm P). Für $\bar{f}(D)$ muss dann gelten

$$\bar{f}(D) = 2f(B) - f(C)$$

aber auch

$$\bar{f}(D) = 2f(A) - f(C') \ .$$

Also ware es schön zu wissen, dass $2f(B) - f(C) = 2f(A) - f(C')$ ist, denn dann könnten wir $\bar{f}(D)$ als dieses wohlbestimmte Element von $\mathbb{Z}/n$ definieren. Tatsächlich gilt

$$2f(B) - f(C) = 2f(A) - f(C'),$$

und man kann das nachweisen, indem man mit den Gleichungen herumspielt, die den drei gezeigten Doppelpunkten von Diagramm P entsprechen. (An dieser Stelle habe ich die Einzelheiten weggelassen.) Auf diese Weise haben wir einen Modulhomomorphismus

$$\hat{\mathcal{F}}_n(P) \longrightarrow \hat{\mathcal{F}}_n(Q)$$

definiert durch $f \mapsto \bar{f}$. Die Situation ist aber einigermassen symmetrisch, so dass wir auf ganz ähnliche Weise einen Modulhomomorphismus

$$\hat{\mathcal{F}}_n(Q) \longrightarrow \hat{\mathcal{F}}_n(P)$$

definieren können. Es bleibt dann nur noch zu zeigen, dass die so definierten Modulhomomorphismen zueinander invers sind. (An dieser Stelle habe ich wieder die Einzelheiten weggelassen.) $\square$

Sanderson hat schöne Beispiele dazu, die ich zum Teil reproduziert habe:

- Sei D das Standarddiagramm für den Unknoten. Dann ist $\mathcal{F}_n(D)$ der Nullmodul.
- Sei D das Standarddiagramm für den Kleeblattknoten. Dann ist $\mathcal{F}_3(D)$ isomorph zu $\mathbb{Z}/3$. Also ist der Kleeblattknoten nicht isotop zum Unknoten.
- Sei D das Standarddiagramm für eine Un-Verschlingung mit drei Komponenten. Dann ist $\mathcal{F}_n(D)$ isomorph zu $(\mathbb{Z}/n)^2$.
- Sei D das Standarddiagramm für die Borromäischen Ringe (eine Verschlingung mit drei Komponenten). Dann ist $\mathcal{F}_3(D)$ der Nullmodul. Also sind die Borromäischen Ringe nicht isotop zur Un-Verschlingung mit drei Komponenten.

Weiteres in den Übungsaufgaben.