12.04.2013

# Notizen zur 1. Vorlesungswoche Knotentheorie SS 2012/13 (Weiss)

Es ging um Definitionen. Obwohl ich gesagt habe, dass dieser Kurs mathematisch nicht sehr streng sein wird, bemühe ich mich (soweit), einigermassen strenge Definitionen zu geben. Gründe:

- Wir Mathematiker sind eben zwanghaft.
- Es hilft uns vielleicht, das Trauma der fehlenden Strenge bei den Beweisen zu überwinden.
- Ich lerne vielleicht etwas dabei (und Sie auch).

Diese Definitionen sind dann (hoffentlich) verlässlich, aber deswegen nicht unbedingt verständlich! Schauen sie sich unbedingt die weniger strengen Versionen bei Sanderson an. Dann kriegen Sie auch oft Skizzen dazu.
Also:

- Was ist ein Knoten? Wann betrachten wir zwei Knoten als äquivalent? Wie soll die Äquivalenzrelation heissen? Ist es überhaupt eine Äquivalenzrelation?
- Was ist eine Verschlingung? Wann betrachten wir zwei Verschlingungen als äquivalent?
- Was ist ein Knotendiagramm? Wann betrachten wir zwei Knotendiagramme als äquivalent? usw.
- Was ist ein Verschlingungsdiagramm? Wann betrachten wir zwei Verschlingungsdiagramme als äquivalent? usw.

Obwohl ich in der Übersicht zur Vorlesung geschrieben habe, dass ein Knoten *grob gesprochen* eine geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^3$ ohne Selbstüberkreuzungen ist, muss ich mich und will ich mich an Lickorish und Sanderson halten ... demnach ist ein Knoten zuallererst eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ (also streng genommen keine *Abbildung*).
Ausserdem: Knoten und Verschlingungen sind Teilmengen von $\mathbb{R}^3$, Knotendiagramme und Verschlingungsdiagramme sind dagegen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ mit etwas Zusatzinformation. (Diese Unterscheidung kann man durch Bilder nicht besonders gut verdeutlichen, weil die Bilder fast immer in $\mathbb{R}^2$ stattfinden!)

**Def.** Eine Teilmenge $K$ von $\mathbb{R}^3$ heisst *Knoten*, wenn eine injektive Abbildung $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$ existiert mit den Eigenschaften

- Bild von $f$ ist $K$
- $f$ ist glatt (unendlich oft diffbar)
- $f$ ist regulär (Ableitung überall ungleich 0).

Wir sagen dann, dass $f$ eine Parametrisierung von $K$ ist.

Dabei ist $S^1$ der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$. Falls Sie nicht wissen, was mit einer differenzierbaren Abbildung von $S^1$ nach $\mathbb{R}^3$ gemeint ist: die Abbildung $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$ ist differenzierbar genau dann, wenn die Zusammensetzung $f \circ u$ differenzierbar ist, wobei $u : \mathbb{R} \to S^1$ mit $u(t) = (\cos t, \sin t)$. Unter *Ableitung* von $f$ verstehen wir eigentlich so etwas wie $df/d\theta$, wobei $\theta$ eine "inverse" stetige Funktion zu $u$ ist, die man lokal (in einer kleinen Umgebung von $z \in S^1$) immer finden kann.

**Def.** Zwei Knoten $K, L \subset \mathbb{R}^3$ heissen *isotop* (stetig verformbar ineinander), wenn es möglich ist, Knoten $K_s$ anzugeben für jedes $s \in [0,1]$, und dazugehörende Parametrisierungen $f_s : S^1 \to \mathbb{R}^3$, so dass $K_0 = K$ und $K_1 = L$ und die Abbildung

$$F : S^1 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ ; \ F(z,s) = f_s(z)$$

glatt ist. (Eigentlich ist *glatt* ein bisschen zu stark; entscheidend ist, dass $F$ stetig ist und dass die partiellen Ableitungen in der $S^1$-Richtung, also $d^k F/d\theta^k$ für alle $k > 0$, existieren und stetig sind.)

**Def.** Eine Teilmenge $K$ von $\mathbb{R}^3$ heisst *Verschlingung* (englisch *Link*), wenn sie disjunkte Vereinigung von endlich vielen Knoten ist. Genauer: Verschlingung mit $r$ Komponenten, wenn disjunkte Vereinigung von $r$ Knoten.

**Def.** Zwei Verschlingungen $K, L \subset \mathbb{R}^3$, beide mit $r$ Komponenten, heissen *isotop* (stetig verformbar ineinander), wenn es möglich ist, Verschlingungen $K_s$ anzugeben für jedes $s \in [0,1]$ (jedes $K_s$ mit $r$ Komponenten) und dazugehörende Parametrisierungen $f_s : S^1 \times \{1,2,\ldots,r\} \to \mathbb{R}^3$, so dass $K_0 = K$ und $K_1 = L$ und die Abbildung

$$F : S^1 \times \{1,2,\ldots,r\} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ ; \ F(z,k,s) = f_s(z,k)$$

glatt ist.

Jetzt zu Knotendiagrammen und Verschlingungsdiagrammen. Der Ordnung halber sollte man mit einem Begriff anfangen, der noch etwas elementarer ist als Knotendiagramm und Verschlingungsdiagramm, nämlich *Schatten*. Also erstmal:

- Was ist ein Schatten? Wann betrachten wir zwei Schatten als äquivalent? Wie soll die Äquivalenzrelation heissen?

**Def.** Eine Teilmenge $D$ von $\mathbb{R}^2$ heisst *Schatten* (englisch *Shadow*), wenn es eine ganze Zahl $r > 0$ und eine glatte reguläre Abbildung

$$f : S^1 \times \{1,2,\ldots,r\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

gibt und eine endliche Teilmenge $P \subset S^1 \times \{1,2,\ldots,r\}$ und eine Bijektion $\sigma : P \to P$ ohne Fixpunkte, $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_P$ , mit den Eigenschaften

- Bild von $f$ ist $D$

- $f(w) = f(z)$ für verschiedene $z, w \in S^1 \times \{1, 2, \ldots, r\}$ gilt genau dann, wenn $w, z \in P$ und $w = \sigma(z)$;
- für $z \in P$ sind die Ableitungsvektoren von $f$ an den Stellen $z$ und $\sigma(z)$ linear unabhängig.

Die Abbildung $f$ ist dann eine Parametrisierung des Schattens $D$. Die Bilder von $S^1 \times \{k\}$ unter $f$, für $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$, heissen Komponenten des Schattens (der Schatten hat also $r$ Komponenten). *Warnung*: Es handelt sich hier nicht um Zusammenhangskomponenten.

Etwas formloser ausgedrückt: Ein Schatten ist eine Vereinigung von endlich vielen geschlossenen glatten regulären Kurven $D$ in $\mathbb{R}^2$, die zusammengenommen nur die netteste Art von Doppelpunkten (Selbstüberkreuzungen) haben darf, nämlich solche, an denen sich genau zwei Zweige der Kurvenvereinigung treffen, und dann mit verschiedenen Richtungen. Die Teilmenge $P$ von $S^1$, die in der strengen Definition oben vorkommt, ist natürlich die Menge der Punkte in $S^1 \times \{1, 2, \ldots, r\}$, die unter der Parametrisierung $f$ auf Doppelpunkte von $D$ abgebildet werden.

**Def.** Ein *Verschlingungsdiagramm* ist ein Schatten $D \subset \mathbb{R}^2$ mit folgender Zusatzinformation: an jedem Doppelpunkt $z$ von $D$, Auswahl $\psi(z)$ einer der zwei Tangenten von $D$ bei $z$. (Diese ausgewählte Tangente soll man sich vorstellen als die *überkreuzende* Tangente, während die andere unterkreuzt.) Falls $D$ nur eine Komponente hat, reden wir von einem *Knotendiagramm.*

**Konstruktion.** Ein Knotendiagramm $(D, \psi)$ bestimmt, bis auf Isotopie, einen Knoten $K$ in $\mathbb{R}^3$ wie folgt. Gegeben eine Parametrisierung $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ von $D$ als Schatten. Wir wählen eine glatte Abbildung $g : S^1 \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $g(w) > g(z)$ falls $w, z \in S^1$ mit $w \neq z$ und $f(w) = f(z)$ und der Zweig von $w$ den Zweig von $z$ *über*kreuzt (nicht *unter*kreuzt). Dann ist die Abbildung

$$S^1 \to \mathbb{R}^3 \ ; \ z \mapsto (f(z), g(z))$$

injektiv und und ... kurz, sie hat alle Eigenschaften, die für eine Knotenparametrisierung benötigt werden; also definieren wir $K$ als das Bild von dieser Abbildung. Dann hängt $K$ ein wenig von unserer Wahl von $g$ ab, aber die Isotopieklasse ist unabhängig davon.
(Ebenso: Ein Verschlingungsdiagramm bestimmt, bis auf Isotopie, eine Verschlingung.)

**Satz oder wichtige Bemerkung.** (Reidemeister) *Bis auf Isotopie kann man jeden Knoten $K$ durch die oben beschriebene Konstruktion aus einem Knotendiagramm erhalten.* Genauer: sei $p$ die lineare Projektion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $p(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ in Koordinaten. Jeder Knoten $K$ ist isotop zu einem Knoten $L$ mit Parametrisierung $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$, so dass die

Zusammensetzung $p \circ f$ eine Schattenparametrisierung ist.
(Entsprechendes gilt für Verschlingungen .)

Wir beweisen das nicht! Weil wir nicht so streng sind. Es gibt aber auch eine stückweise lineare Version der Definitionen oben, mit der man die entsprechende Bemerkung von Reidemeister leichter beweisen kann. Kommt vielleicht später.

**Def.** Zwei Schatten $D, E$ in $\mathbb{R}^2$ sollen *ähnlich* heissen, wenn Schatten $D_s$ existieren, wobei $s \in [0,1]$, mit Parametrisierung $f_s : S^1 \times \{1, 2, \ldots, r\} \to \mathbb{R}^2$ für $D_s$, derart, dass $D_0 = D$, $D_1 = E$, und die Abbildung

$$F : S^1 \times \{1, 2, \ldots, r\} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ ; \ F(z,k,s) = f_s(z,k)$$

glatt ist. (Dann ist die Zahl der Doppelpunkte von $D_s$ konstant als Funktion von $s \in [0,1]$; insbesondere hat $E$ genauso viele Doppelpunkte wie $D$. Ausserdem ist auch die Zahl der Komponenten von $D_s$ konstant.)
Zwei Knotendiagramme $(D, \psi)$ und $(E, \varphi)$ heissen *ähnlich*, wenn Knotendiagramme $(D_s, \psi_s)$ existieren, wobei $s \in [0,1]$, mit Parametrisierung

$$f_s : S^1 \to \mathbb{R}^2$$

für $D_s$, derart, dass $D_0 = D$, $D_1 = E$, die Abbildung

$$F : S^1 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ ; \ F(z,s) = f_s(z,k)$$

glatt ist, und die Zusatzdaten $\psi_s$ stetig von $s$ abhängen. (Entsprechend für Verschlingungsdiagramme.)

Diese Definition habe ich in keiner Vorlage gefunden; alle anderen tun so, als ob ähnliche Schatten oder Knotendiagramme oder Verschlingungsdiagramme einfach gleich sind. Trotzdem ist das Ende der Definition von *ähnlich* für Knotendiagramme etwas liederlich. Wichtig für uns ist hier, dass das Urbild unter $f_s$ von der Doppelpunktmenge von $D_s$ eine endliche Teilmenge von $S^1 \times \{1, 2, \ldots, r\}$ mit $2m$ Elementen ist, $m$ unabhängig von $s \in [0,1]$, und als solche stetig von $S$ abhängt. (Das kann auch noch genauer formuliert werden. Es ist keine zusätzliche Forderung, sondern eine Konsequenz aus dem schon Geforderten.)
Es soll klar sein, dass zwei Knotendiagramme, die ähnlich sind, isotope Knoten bestimmen (durch die Konstruktion oben). Die Umkehrung gilt aber nicht: zwei Knotendiagramme, die nicht ähnlich sind, können sehr wohl Knoten bestimmen, die isotop sind. Zum Beispiel kann man den Kleeblattknoten mit einem Knotendiagramm darstellen, das nur 3 Doppelpunkte hat, aber einen isotopen Knoten dazu mit einem Knotendiagramm, das 5 Doppelpunkte hat. Diese Knotendiagramme sind dann nicht ähnlich.

Wenn wir uns auf den Standpunkt stellen, dass wir Knotendiagramme und Verschlingungsdiagramme einigermassen verstehen und unterscheiden können,

bis auf Ähnlichkeit, wird die Frage interessant: welche Ähnlichkeitsklassen von Knotendiagrammen (Verschlingungsdiagrammen) bestimmen dieselbe Isotopieklasse von Knoten (Verschlingungen). Andererseits könnten wir auch mal den Standpunkt einnehmen, dass wir Knotendiagramme (und Schatten) doch noch nicht so gut verstehen. Das machen wir jetzt für Knotendiagramme und Schatten mit einer Komponente.

**Lemma.** *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Schatten. Dann kann das Komplement von $D$ mir einem Schachbrettmuster eingefärbt werden (jede Zusammenhangskomponente mit Farbe Schwarz oder Weiss, derart, dass aneinander angrenzende Zushgskomponenten verschiedene Farben haben).*

*Beweis.* Siehe Sanderson Lemma 2.9. Ich habe ein anderes Argument gegeben, etwa so. Modifiziere Schatten $D$ und erhalte $\hat{D}$ wie bei Lickorish theorem 2.2. und Figure 2.2. Das Komplement von $\hat{D}$ lässt sich leicht mit Schachbrettmuster einfärben, weil $\hat{D}$ keine Doppelpunkte hat. Aus der Einfärbung vom Komplement von $\hat{D}$ kann man aber leicht eine geeignete Einfärbung vom Komplement von $D$ herstellen. □

**Korollar.** Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Schatten mit nur einer Komponente, mit Parametrisierung $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$. Sei $P \subset S^1$ die Menge der Punkte, die unter $f$ auf Doppelpunkte von $D$ abgebildet werden, mit der üblichen Bijektion $\sigma : P \to P$, fixpunktfrei, $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$. Wenn $P$ in konsistenter Umlaufrichtung durchnumeriert wird (mit Zahlen von 1 bis $2m$), dann ist immer

$$\sigma(\text{ungerade}) = \text{gerade}.$$

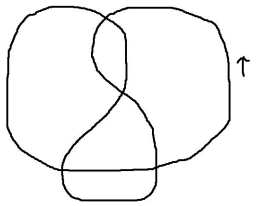
*Beweis.* Wir wählen ein Schachbrettmuster wie oben und teilen die Punkte von $P$ in zwei Typen ein: Typ I, solche, die in der Durchlaufrichtung vorne rechts und hinten links schwarz sehen, Typ 2, solche, die in der Durchlaufrichtung vorne rechts und hinten links weiss sehen. Durch Induktion im Sinne des Durchlaufens sieht man, dass entweder Typ I den gerade numerierten Elementen von $P$ entspricht und Typ II den ungeraden, oder umgekehrt. Andererseits ist klar, dass $\sigma$ die Typen I und II vertauscht. □

(Siehe auch Kapitel 1, genauer Seite 7, in Lickorish.) Das bedeutet, dass $\sigma$ eine Bijektion der Menge $\{1, 3, 5, \ldots, 2m-1\}$ mit der Menge $\{2, 4, 6, \ldots, 2m\}$ stiftet. (Diese Bijektion hängt natürlich davon ab, wo wir mit dem Durchnumerieren anfangen.) Wir können diese Bijektion durch eine geordnete Liste der geraden Zahlen zwischen 1 und $2m$ beschreiben: z.B. bedeutet die Liste

$$4 \quad 8 \quad 10 \quad 2 \quad 6$$

dass $m = 5$ ist und dass $\sigma(1) = 4$, $\sigma(3) = 8$, $\sigma(5) = 10$, $\sigma(7) = 2$ und $\sigma(9) = 6$. Wir fragen jetzt: Lässt sich der Schatten aus dieser Liste rekonstruieren? (Die Antwort ist: es fehlt nicht viel.) Entspricht jede derartige

Liste einem Schatten? (Die Antwort ist eher nein.) Können wir eine einfache Bedingung angeben, die die Listen beschreibt, welche von Schatten kommen? (Die Antwort ist ja.)
Illustration mit dem Schatten vom Achtknoten (Figure-Eight Knot), also $m = 4$:



Wenn man mit dem Durchlaufen da anfängt, wo der Pfeil ist, und in der angegebenen Richtung läuft, erhält man

$$6\ 8\ 2\ 4$$

Was uns zur Rekonstruktion noch fehlt (finde ich), ist Information betreffend Orientierungen. Bei gewählter Durchlaufrichtung können wir an jedem Doppelpunkt des Schattens zwei Pfeile anbringen: Pfeil Nummer 1 in (Durchlauf)Richtung der Tangente, die zur ungeraden Zahl gehört, und Pfeil Nummer 2 in (Durchlauf)Richtung der Tangente, die zur geraden Zahl gehört. Also geordnete Basis ... diese geordneten Basen von $\mathbb{R}^2$ haben manchmal positive, manchmal negative Determinante. Ich markiere die Fälle von negativer Determinante durch ein Superskript $s$. Also in unserem Beispiel:

$$6^s\ 8\ 2^s\ 4$$

Das soll jetzt *der Kode* vom Schatten heissen. Können wir aus so einem Kode den Schatten rekonstruieren? Ich meine ungefähr ja. Wenn wir uns das Bild vom Schatten anschauen (unser Beispiel Schatten vom "Figure-Eight" Knoten), stellen wir fest, dass das Komplement vom Schatten in Zusammenhangskomponenten zerfällt. Es gibt davon $6 = m + 2$ Stück. Das ist kein Zufall. Es müssen immer $m + 2$ sein. Denn der Schatten zerlegt $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, die 2-dimensionale Sphäre, in $m$ Ecken (die Doppelpunkte vom Schatten), $2m$ Kanten (die Verbindungen zwischen den Doppelpunkten), und sagen wir $F$ zushgde Flächenstücke. Dann muss $m - 2m + F$ gleich 2 sein. (Anzahl der Ecken minus Anzahl der Kanten plus Anzahl der Flächenstücke macht 2 für eine Zerlegung der 2-Sphäre; das ist eine moderne Verallgemeinerung

von Eulers Satz für Polyeder). Also, wie auch immer, $F = m + 2$.
Aus dem Kode können wir ablesen, welche der $2m$ Kanten ein gemeinsames Flächenstück begrenzen. Genauer: wir bilden die Menge $M$ der Kanten vom Schatten mit Orientierung; das ist dann eine Menge mit $4m$ Elementen. Wir machen eine Bijektion $\tau : M \to M$ wie folgt. Für eine Kante $u$ mit Orientierung ist $\tau(u)$ die orientierte Kante, die wir erhalten, indem wir Kante $u$ in der angegebenen Richtung durchlaufen und am Endpunkt nach links abbiegen (statt weiter geradeaus zu fahren). Die Flächenstücke des Schattenkomplements entprechen jetzt genau den Zykeln der Permutation $\tau$. Also ist es wichtig, dass die Permutation $\tau$ genau $m + 2$ Zykel hat. Das ist eine starke Bedingung an den Kode.
In unserem Beispiel: Wenn $u$ die Kante von 1 nach 2 ist, dann ist $\tau(u)$ die Kante von 5 nach 6. (Weil über der 2 im Kode eine 5 steht oder mal gestanden hat.) Wenn $u$ die Kante von 8 nach 1 ist, dann ist $\tau(u)$ die Kante von 6 nach 5. (Weil unter der 1 im Kode eine 6 steht; aber hier haben wir auch das $s$ auf der 6 zur Kenntnis genommen, deswegen läuft $\tau(u)$ von 6 nach 5 und nicht von 6 nach 7.) Wenn $u$ die Kante von 2 nach 1 ist, dann ist $\tau(u)$ die Kante von 6 nach 7. (Weil unter der 1 eine 6 steht, usw.)
Wenn wir auf diese Weise mit Hilfe vom Kode herausgekriegt haben, welche Kantenauswahlen ein Flächenstück begrenzen sollen, dann können wir aus $m$ Ecken, $2m$ Kanten und $m + 2$ vorschriftsmässig eingeklebten Scheiben eine 2-dimensionale geschlossene Fläche zusammenbauen, die dann eine Sphäre sein sollte (weil sie so eine Zerlegung besitzt mit Anzahl der Ecken minus Anzahl der Kanten plus Anzahl der Flächenstücke gleich 2). Dieses $N$ müssen wir dann aber noch in geeigneter Weise mit $\mathbb{R}^2 \cup \infty$ identifizieren, und zwar so, dass der Punkt $\infty$ nicht einem Punkt im 1-dimensionalen Gerüst aus Ecken und Kanten entspricht. Damit haben wir unseren Schatten in $\mathbb{R}^2$. (Wir haben leider ein paar verschiedene Möglichkeiten, $N$ mit der 2-Sphäre zu identifizieren; das bewirkt, dass wir manchmal mehrere nicht-ähnliche Schatten für einen einzigen Kode bekommen, aber man kann leicht verstehen, wie diese auseinander hervorgehen.) Umgekehrt ist auch der Kode nicht ganz eindeutig durch den Schatten bestimmt. Der Kode hängt davon ab, wo wir mit der Numerierung von $P$ anfangen und welche Durchlaufrichtung wir wählen. Aber wieder ist es leicht zu verstehen, wie sich der Kode ändert, wenn wir Durchlaufrichtung oder Anfangspunkt ändern.