14.07.2013

Notizen zur 13. Vorlesungswoche Knotentheorie SS 2012/13 (Weiss)

Kofasersumme (engl. Pushout) in der Kategorie der Gruppen, auch freies amalgamiertes Produkt *usw. genannt.* Gegeben Gruppen G_1, G_2, H und Homomorphismen

$$G_1 \xleftarrow{f_1} H \xrightarrow{f_2} G_2 \ .$$

Wir können das Kofaserprodukt K davon (in der Kategorie der Gruppen) wie folgt beschreiben. Ein Element von K ist eine Äquivalenzklasse von Worten

$$x_1 x_2 \dots x_r$$

wobei die Zahl r der Buchstaben irgendeine natürliche Zahl sein kann ($r = 0$ erlaubt) und die Buchstaben $x_1, \dots, x_r$ aus der disjunkten Vereinigung der Mengen G_1 und G_2 genommen werden. (Wie bei der Beschreibung des Koprodukts $G_1 * G_2$ tue ich so, also ob G_1 und G_2 schon disjunkt sind als Mengen.) Die Äquivalenzrelation ist wie folgt definiert. Wie in der Definition von $G_1 * G_2$ sagen wir

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_{k-1} x_k x_{k+1} x_{k+2} \dots x_r \sim x_1 x_2 x_3 \dots x_{k-1} y x_{k+2} \dots x_r$$

falls $x_k, x_{k+1} \in G$ und $y = x_k x_{k+1}$ in G, und auch falls $x_k, x_{k+1} \in H$ und $y = x_k x_{k+1}$ in H. Ausserdem bestimmen wir

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_{k-1} x_k x_{k+1} \dots x_r \sim x_1 x_2 x_3 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_r$$

falls $x_k = 1 \in G$ oder $x_k = 1 \in H$. *Zusätzlich* erlauben wir Ersetzen eines Buchstabens der Form $f_1(z) \in G_1$ durch $f_2(z) \in G_2$, für dasselbe $z \in H$. (Wir nehmen dann die kleinste Äquivalenzrelation, die alle diese Beziehungen enthält.) Die Verknüpfung in K ist gegeben durch Hintereinanderschreiben von Worten. Damit wird K eine Gruppe (Erklärung wie bei Beschreibung von $G_1 * G_2$). Wir haben Abbildungen $j_1 \colon G_1 \to K$ und $j_2 \colon G_2 \to K$, die jedem $x \in G_1$ bzw $x \in G_2$ das entsprechende Wort aus einem Buchstaben zuordnen. Aufgrund der Relationen, die wir eingeführt haben, sind diese Abbildungen Homomorphismen. Ausserdem gilt $j_1 \circ f_1 = j_2 \circ f_2$, weil wir auch das erzwungen haben.

Wenn jetzt L eine ganz andere Gruppe ist und $u_1 \colon G_1 \to L$, $u_2 \colon G_2 \to L$ Homomorphismen sind mit der Eigenschaft $u_1 \circ j_1 = u_2 \circ j_2$, dann gibt es genau einen Homomorphismus $h \colon K \to L$ mit $u_1 = h \circ j_1$ und $u_2 = h \circ j_2$. Denn wir können und müssen h definieren, indem wir die Äquivalenzklasse von einem Wort

$$x_1 x_2 \dots x_r$$

auf $f_{i_1}(x_1) \cdot f_{i_2}(x_2) \cdots f_{i_r}(x_r) \in L$ abbilden, wobei $i_t = 1$ wenn $x_t \in G_1$ und $i_t = 2$ wenn $x_t \in G_2$.

Ich hatte das Beispiel $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gegeben, Gruppe der 2×2 Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Z}$ und Determinante 1. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Dann gilt $A^4 = B^6 = I$ und ausserdem $A^2 = B^3 = -I$, wie man leicht nachrechnet. Also sind $G_1 = \{I, A, A^2, A^3\}$ und $G_2 = \{I, B, B^2, B^3, B^4, B^5\}$ Untergruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit Durchschnitt $H = \{I, -I\}$. Wir schreiben jetzt $u_1 \colon G_1 \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $u_2 \colon G_2 \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ für die Inklusionen und auch $f_1 \colon H \to G_1$ und $f_2 \colon H \to G_2$ für die Inklusionen. Dann haben wir eine Situation wie oben beschrieben hergestellt (mit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ für L) und erhalten zur Belohnung einen eindeutigen Homomorphismus h von der Kofasersumme

$$G_1 *_H G_2$$

nach $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, der $h \circ j_1 = u_1$ und $h \circ j_2 = u_2$ erfüllt. Es ist eine interessante und bekannte (aber nicht triviale) Tatsache, dass dieser Homomorphismus ein Isomorphismus ist. Das heisst, wir können schreiben

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \;\cong\; \mathbb{Z}/4 *_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/6 \ .$$

Kofasersummen von Gruppen kommen im Satz über Fundamentalgruppen von Seifert-vanKampen vor, und das ist einer der wichtigsten Anlässe für solche Kofasersummen. Hier kommen ein paar einfache Beispiele zu Seifert-vanKampen, die für uns wichtig sind. (Ein interessanteres Beispiel kommt später mit der Wirtinger-Präsentation.)

Wir zeigen $\pi_1(S^n, *) = \{1\}$ *für* $n > 1$. Bedenken, dass $\pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z}$ schon diskutiert worden ist (um nicht zu sagen *bewiesen*). Um etwa den Fall S^2 zu erledigen, wählen wir als Grundpunkt den Punkt $(1, 0, 0) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und schreiben $S^2 = V \cup W$, wobei

$$V = \{(x, y, z) \in S^2 \mid 2z > -1\} \ , \qquad W = \{(x, y, z) \in S^2 \mid 2z < 1\} \ .$$

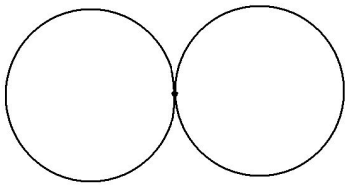
Dann sind sowohl V als auch W homöomorph zu $\mathbb{R}^2$. Der Durchschnitt $V \cap W$ ist homöomorph zu $S^1 \times \mathbb{R}$ und damit isomorph in der punktierten Homotopiekategorie $\mathcal{HT}_*$ zu S^1. Also ist

$$\pi_1(V, *) = \{1\} = \pi_1(W, *) \ , \qquad \pi_1(V \cap W, *) \cong \mathbb{Z} \ .$$

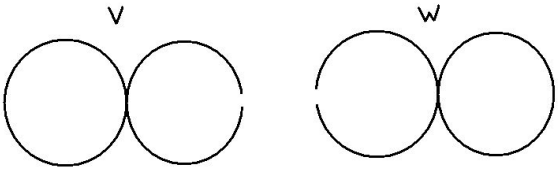
Ausserdem bemerken wir mit Wohlwollen, dass V, W und $V \cap W$ zusammenhängend sind, ausserdem offen in S^2, und alle den Grundpunkt enthalten. Nach Seifert-vanKampen ist also

$$\pi_1(S^2, *) \cong \{1\} *_{\mathbb{Z}} \{1\} \ ,$$

und das ist eine triviale Gruppe. Wie versprochen. Die Berechnung von $\pi_1(S^n, *)$ für grösseres n kann ähnlich zurückgeführt werden auf Kenntnis von $\pi_1(S^{n-1}, *)$.
Wir zeigen, dass $\pi_1(S^1 \vee S^1 \vee \cdots \vee S^1, *)$ eine freie Gruppe mit k Erzeugern ist, wobei k die Anzahl der "Wedge" Summanden ist. (Bedenken, dass $\vee$ das Koprodukt in der Kategorie der punktierten Räume bezeichnet.) Ich führe das vor im Fall von $S^1 \vee S^1$:



Der Grundpunkt ist hier der Punkt, den die beiden "Kreise" gemeinsam haben. Sei $V = S^1 \vee S^1 \smallsetminus \{x\}$ und $W = S^1 \vee S^1 \smallsetminus \{y\}$, wobei x im rechten Kreis und y im linken Kreis gewählt werden (beide $\neq$ Grundpunkt).



Man überlegt sich, dass V und W beide isomorph sind in der punktierten Homotopiekategorie $\mathcal{HT}_*$ zu S^1. Ausserdem ist $V \cap W$ isomorph in der punktierten Homotopiekategorie $\mathcal{HT}_*$ zu einem Einpunktraum (zum Beispiel ist es erstmal homöomorph zu einer sternförmigen Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, und sternförmige hatten wir schon abgehakt). Ausserdem bemerken wir mit Wohlwollen, dass V, W und $V \cap W$ zusammenhängend sind, ausserdem offen in $S^1 \vee S^1$, und alle den Grundpunkt enthalten. Nach Seifert-vanKampen

ist also

$$\pi_1(S^1 \vee S^1, *) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \ .$$

Das ist eine freie Gruppe mit zwei Erzeugern, wie versprochen (nicht kommutativ!!!). Der Fall von k Wedge-Summanden, $k > 2$, lässt sich auf den Fall mit $k-1$ Summanden zurückführen.

Präsentationen von Gruppen. Eine Präsentation einer Gruppe G ist eine Beschreibung der Gruppe in der folgenden Form:

$$G = \langle x_1, x_2, \ldots, x_k \mid w_1, w_2, \ldots, w_\ell \rangle \ .$$

Dabei sind $x_1, \ldots, x_k$ beliebige (aber verschiedene) Symbole, die als Buchstaben dienen sollen, und die $w_1, \ldots, w_\ell$ sind ausgesuchte "Worte", die die Form

$$x_{m(1)}^{n(1)} x_{m(2)}^{n(2)} \cdots x_{m(r)}^{n(r)}$$

haben, wobei $m(1), \ldots, m(r) \in \{1, 2, \ldots, k\}$ und $n(1), n(2), \ldots, n(r) \in \mathbb{Z}$. Dabei ist $r \geq 0$. Die $w_1, \ldots, w_r$ müssen nicht unbedingt verschieden sein.
Damit ist folgendes gemeint. Sei $\mathcal{W}$ die Menge *aller* Worte der Form

$$x_{m(1)}^{n(1)} x_{m(2)}^{n(2)} \cdots x_{m(r)}^{n(r)}$$

mit beliebigem $r \geq 0$ usw. Wenn ein Wort $W \in \mathcal{W}$ ein Teilwort enthält, das zu den ausgewählten Worten $w_1, \ldots, w_\ell$ gehört, dann wollen wir sagen, dass das Wort W' , welches durch Auslassen von diesem Teilwort ensteht, zu W *äquivalent* ist. (Wir bauen also die kleinste Äquivalenzrelation auf $\mathcal{W}$, die diese Paare (W, W') enthält.) Die Menge der Äquivalenzklassen soll G sein. Durch Hintereinanderschreiben von Worten wird eine Verknüpfung in G definiert. Dadurch wird G zu einer Gruppe.
Etwas andere Beschreibung: G kann definiert werden als F_k/R, wobei F_k die freie Gruppe mit k Erzeugern (genannt $x_1, \ldots, x_k$) ist und R die kleinste *normale* Untergruppe von F_k, die die Elemente $w_1, \ldots, w_\ell \in F_k$ enthält.
Beispiel: Wir haben oben gesehen, dass

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle A, B \mid A^4, B^6, A^2B^{-3} \rangle \ .$$

Übrigens ist auch die Schreibweise

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle A, B \mid A^4 = 1,\ B^6 = 1,\ A^2 = B^3 \rangle$$

üblich und deswegen erlaubt (aber weniger formalisiert). Und ehrlicher wäre vielleicht

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \langle A, B \mid A^4, B^6, A^2B^{-3} \rangle$$

wobei $\cong$ *isomorph* bedeutet.
Die Beschreibung einer Gruppe durch eine Präsentation ist im Zusammenhang mit Fundamentalgruppen sehr wichtig, weil es sonst oft keine naheliegende Beschreibung gibt.

Abgeleitete Reihe einer Gruppe. Sei G eine Gruppe. Mit $[G,G]$ bezeichnet man die kleinste normale Untergruppe von G, die alle Elemente der Form $xyx^{-1}y^{-1}$ für beliebiges $x,y \in G$ enthält. Der Quotient $G/[G,G]$ ist dann eine kommutative Gruppe. Gute Eigenschaft: Jeder Homomorphismus von G in eine *kommutative* Gruppe H muss auf $[G,G]$ trivial sein und lässt sich demnach eindeutig zerlegen in der Form

$$G \xrightarrow{\text{Projektion}} G/[G,G] \longrightarrow H \ .$$

Die abgeleitete Reihe von G ist leider garkeine Reihe, sondern eine absteigende *Folge* von Untergruppen von G:

$$G = G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset G^{(3)} \supset \cdots$$

wobei $G^{(j+1)} = [G^{(j)}, G^{(j)}]$ für $j \geq 0$. Also ist $G^{(j)}/G^{(j+1)}$ eine kommutative Gruppe, für jedes $j \geq 0$.
Noch etwas ist wichtig. Gegeben $x \in G^{(j)}$ und $y \in G^{(j+1)}$. Dann ist $x^{-1}yx \in G^{(j+1)}$. Ausserdem rechnet man leicht nach, dass der Wert von $x^{-1}yx$ in der kommutativen Gruppe $G^{(j+1)}/G^{(j+2)}$ nur vom Wert von x in der kommutativen Gruppe $G^{(j)}/G^{(j+1)}$ und dem Wert von y in der kommutativen Gruppe $G^{(j+1)}/G^{(j+2)}$ abhängt. Also definiert $y \mapsto x^{-1}yx$ einen Automorphismus der Gruppe $G^{(j+1)}/G^{(j+2)}$. Mit anderen Worten: die kommutative Gruppe $G^{(j)}/G^{(j+1)}$ *wirkt* auf der kommutativen Gruppe $G^{(j+1)}/G^{(j+2)}$. (Jedes Element von $G^{(j)}/G^{(j+1)}$ bestimmt einen Gruppenautomorphismus von $G^{(j+1)}/G^{(j+2)}$; wir haben also einen Homomorphismus von $G^{(j)}/G^{(j+1)}$ in die Gruppe der Gruppenautomorphismen von $G^{(j+1)}/G^{(j+2)}$.)
Wozu sage ich das? Man kann auf diese Weise den Zusammenhang zwischen $G = \pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus K, *)$ und $\mathcal{A}(D)$ verstehen, wobei K ein orientierter Knoten in $\mathbb{R}^3$ ist und D ein Knotendiagramm dafür. Denn erstens gilt in diesem Fall

$$G^{(0)}/G^{(1)} \cong \mathbb{Z} \ ,$$

so dass nach dem, was oben gesagt wurde, $G^{(1)}/G^{(2)}$ eine kommutative Gruppe mit Wirkung von $\mathbb{Z}$ ist. Das ist dasselbe, wie eine kommutative Gruppe mit einem Gruppenautomorphismus (der Gruppenautomorphismus ist das, was $1 \in \mathbb{Z}$ be*wirkt*). Das ist dasselbe, wie ein ein Modul über $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$. Zweitens gilt

$$G^{(1)}/G^{(2)} \cong \mathcal{A}(D) \ .$$

Das soll jetzt ein Isomorphismus von Moduln über $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ sein. Wie dieser zustande kommt, soll weiter unten erklärt werden.
Es gibt wohl (glaube ich) eine ähnliche Aussage für Verschlingungen, die ich aber jetzt nicht mehr hinschreiben will.

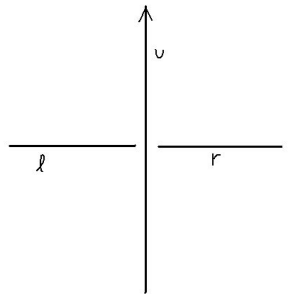
Wirtinger-Präsentation von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus L, *)$ für orientierte Verschlingung L mit Diagramm D. Der Titel sagt schon vieles. Wir kriegen eine Beschreibung von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus L, *)$, die das Diagramm D benutzt. Sie erinnert stark an die Beschreibung vom Alexandermodul $\mathcal{A}(D)$, der ja auch (bis auf Isomorphismus) nur von der Isotopieklasse der Verschlingung L abhängt. Sie sollen verstehen: Die Wirtinger-Präsentation ist grundlegender, urtümlicher usw. Unsere Beschreibung vom Alexandermodul $\mathcal{A}(D)$ kommt daher. Das soll später noch genauer erklärt werden.
Die Wirtinger-Präsentation hat die Form

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus L, *) \cong \langle x_1, \ldots, x_m \mid w_1, \ldots, w_n \rangle$$

wobei m die Anzahl der Bögen in D ist und n die Anzahl der Doppelpunkte. Jeder Erzeuger x_i gehört zu genau einem Bogen und jedes Wort w_i gehört zu genau einem Doppelpunkt. Und zwar ist

$$w_i = x_\ell x_u x_r^{-1} x_u^{-1}$$

wenn wir am Doppelpunkt Nummer i den überkreuzenden Bogen Nummer u und unterkreuzende Bögen Nummer ℓ und r wie folgt sehen:

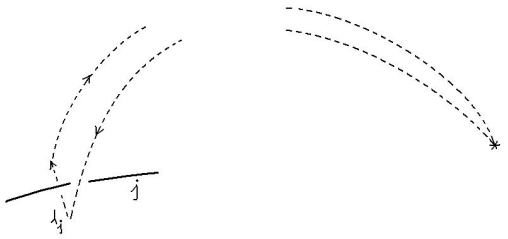


(Die Orientierung des unterkreuzenden Bogens wird nicht gebraucht, aber es ist wichtig, dass Bogen ℓ in Fahrtrichtung links vom überkreuzenden Bogen liegt, Bogen r rechts.) Statt $w_i = x_\ell x_u x_r^{-1} x_u^{-1}$ darf man auch schreiben $x_\ell x_u = x_u x_r$. Das heisst, wir können uns die Präsentation auch so merken:

$$\langle x_1, \ldots, x_m \mid x_{\ell(1)} x_{u(1)} = x_{u(1)} x_{r(1)}, \ldots, x_{\ell(n)} x_{u(n)} = x_{u(n)} x_{r(n)} \rangle$$

wobei $x_{u(j)}$ der überkreuzende Bogen bei Doppelpunkt Nummer j ist und $x_{\ell(j)}, x_{r(j)}$ die unterkreuzenden Bögen in Fahrtrichtung links und rechts vom überkreuzenden Bogen bei Doppelpunkt j.
Da wir schon bei "Merken" sind: man kann sich die Präsentation noch besser merken, wenn man versteht, was die Erzeuger x_j in $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus L, *)$ bedeuten sollen. Wir denken uns, dass D tatsächlich die Projektion von $L \subset \mathbb{R}^3$ in die Ebene $\mathbb{R}^2$ ist. (Also kann man L aus D rekonstruieren, indem man bei

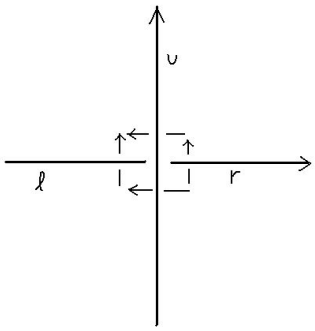
Doppelpunkten die unterkreuzenden Zweige etwas absenkt.) Wir denken uns, dass der Grundpunkt $*$ von $\mathbb{R}^3 \smallsetminus L$ die Form $(s, 0, -1/2)$ hat mit riesigem $s \in \mathbb{R}$ (sehr positiv). Er liegt also weit rechts von D, etwas unterhalb von der Ebene $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Um x_j als Element von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus L, *)$ zu definieren, machen wir eine stückweise glatte geschlossene Kurve Δ_j in $\mathbb{R}^3 \smallsetminus L$ bestehend aus einem kleinen Linienstück λ_j, das dicht unter Bogen j durchläuft wie im Bild, und zwei Kurvenstücken, die die Anfangs- und Endpunkte von λ_j mit dem Grundpunkt verbinden in einem hohen Bogen über D. Weil die Figur Δ_j homöomorph zu S^1 ist, haben wir damit eine stetige Abbildung $S^1 \to \mathbb{R}^3 \smallsetminus L$ konstruiert (grundpunkterhaltend). Genauer soll der Homöomorphismus so gewählt werden, dass die positive Durchlaufrichtung von S^1 der Durchlaufrichtung Grundpunkt — Anfangspunkt von λ_j — Endpunkt von λ_j — Grundpunkt von Δ_j entspricht.



Da nun schon $x_1, \ldots, x_m$ als Elemente von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus L, *)$ erklärt sind, kann man sich leicht (mit geeigneter Malerei) überlegen, dass die Beziehung

$$x_{\ell(i)} x_{u(i)} = x_{u(i)} x_{r(i)}$$

(gehörend zu Doppelpunkt Nummer i) tatsächlich gilt in $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus L, *)$. Hier ist eine derartige Malerei (zwei werden eigentlich gebraucht):



Dabei beschreiben die kleinen horizontalen Segmente grob gesprochen λ_u und die vertikalen λ_ℓ (links) bzw λ_r (rechts).
Das bedeutet, dass wir einen eindeutigen Homomorphismus von

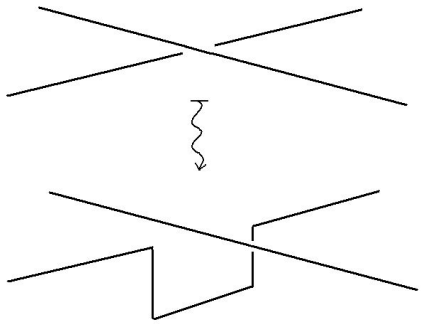
$$\langle x_1, \ldots, x_m \mid x_{\ell(1)} x_{u(1)} = x_{u(1)} x_{r(1)}, \ldots, x_{\ell(n)} x_{u(n)} = x_{u(n)} x_{r(n)} \rangle$$

nach $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus L, *)$ haben, der die Symbole $x_1, \ldots, x_m$ auf die Elemente von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus L, *)$ abbildet, die wir durch die Figuren $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ definiert haben. Das war Wirtingers Gedanke. Dazu konnte er dann noch beweisen, dass dieser eindeutige Homomorphismus ein Isomorphismus ist. Das wollen wir auch noch verstehen.

Beweis von Wirtinger mit Seifert-vanKampen. Wie schon angedeutet, fangen wir mit D an und denken uns, dass der zugehörige Schatten in

$$\mathbb{R}^2 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid w = 0\}$$

enthalten ist. Wir denken uns die dritte Koordinaten in $\mathbb{R}^3$ als *Höhe*. In diesem Sinn rekonstruieren wir die Verschlingung L aus dem Diagramm D, indem wir bei Doppelpunkten von D die unterkreuzenden Zweige etwas absenken. Wir müssen jetzt etwas genauer sein. An jedem Doppelpunkt von D wählen wir ein kleines Intervall auf dem unterkreuzenden Zweig, mit dem Doppelpunkt im Zentrum, und senken es ab auf Niveau -1 (also z-Koordinate -1). Wir stellen die Verbindung mit dem nicht abgesenkten Rest von D durch vertikale Linienstücke der Länge 1 wieder her. Das Resultat ist dann L. (Dieses L ist zwar nicht mehr glatt, aber das soll uns jetzt egal sein; Ecken abrunden wenn gewünscht.) Bild:



Im Hinblick auf Seifert-vanKampen sei jetzt

$$V = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus L \mid w > -1+\varepsilon\}, \qquad W = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus L \mid w < -\varepsilon\}$$

für ein kleines festes $\varepsilon > 0$. Dann sind V, W und $V \cap W$ offen in $\mathbb{R}^3 \smallsetminus L$, ausserdem zusammenhängend und enthalten den Grundpunkt, und ausserdem $V \cup W = \mathbb{R}^3 \smallsetminus L$. (Deswegen sind wir mit der Wahl vom Grundpunkt

so pedantisch gewesen ... damit er auch noch zu $V \cap W$ gehört.) Damit ist eigentlich schon das wichtigste getan; wir können jetzt Seifert-vanKampen anwenden und erhalten $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus L, *)$ als Kofasersumme von

$$\pi_1(V, *) \leftarrow \pi_1(V \cap W, *) \rightarrow \pi_1(W, *)$$

wobei die Pfeile Homomorphismen bedeuten, die von den Inklusionen von $V \cap W$ nach V und W bestimmt werden. Das heisst, wir müssen jetzt noch $\pi_1(V, *)$, $\pi_1(W, *)$ und $\pi_1(V \cap W)$ und diese beiden Homomorphismen ausrechnen.
Das soll jetzt aber nur angedeutet werden Wenn man sich V genauer anguckt, sieht man, dass es ein offener oberer Halbraum in $\mathbb{R}^3$ ist, aus dem m Hufeisen entfernt worden sind, eines für jeden Bogen von D. Ähnlich ist W ein offener unterer Halbraum in $\mathbb{R}^3$, aus dem n Hufeisen entfernt worden sind, eines für jeden Doppelpunkt von D. Wenn man sich ein bisschen mit $\mathcal{HT}_*$ auskennt, schliesst man daraus, dass V punktiert homotopieäquivalent ist zu

$$\bigvee_{r=1}^{m} S^1$$

und dass W punktiert homotopieäquivalent ist zu

$$\bigvee_{r=1}^{n} S^1 \ .$$

Also ist $\pi_1(V, *)$ eine freie Gruppe mit m Erzeugern $x_1, \ldots, x_m$, die wir eigentlich oben schon gesehen haben als Elemente von

$$\pi_1(V \cup W, *) = \pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus L, *).$$

Ebenso ist $\pi_1(W, *)$ eine freie Gruppe mit n Erzeugern $y_1, \ldots, y_n$, die wir so noch nicht gesehen haben. Schliesslich und endlich ist

$$V \cap W = (\mathbb{R}^2 \smallsetminus S) \times \ ]-1+\varepsilon, -\varepsilon[$$

für eine gewisse endliche Teilmenge S von $\mathbb{R}^2$ mit $2n$ Elementen. Daraus kann man schliessen, dass $V \cap W$ punktiert homotopiäquivalent ist zu

$$\bigvee_{r=1}^{2n} S^1 \ .$$

Also ist $\pi_1(V \cap W, *)$ eine freie Gruppe mit Erzeugern $z_1, z_1', \ldots, z_n, z_n'$.
Jetzt müssen wir noch diese Homomorphismen von $\pi_1(V \cap W, *)$ nach $\pi_1(V, *)$ und $\pi_1(W, *)$ bestimmen. Das ist leider schwierig (besonders, weil ich oben die Isomorphismen der Fundamentalgruppen von V, W und $V \cap W$ mit

freien Gruppen F_m, F_n und F_{2n} nicht präzisiert habe; das muss man unbedingt machen). Ich denke noch darüber nach und glaube unterdessen, dass folgendes herauskommt:

$$\pi_1(V \cap W, *) \ni z_i \ \mapsto \ \gamma_i x_{\ell(i)} \gamma_i^{-1} \in \pi_1(V, *),$$
$$\pi_1(V \cap W, *) \ni z_i' \ \mapsto \ (\gamma_i x_{u(i)}) x_{r(i)} (\gamma_i x_{u(i)})^{-1} \in \pi_1(V, *)$$

für gewisse Elemente $\gamma_i \in \pi_1(V, *)$, die wir nicht unbedingt kennen müssen. (Es sind eben Elemente der freien Gruppe, die von den $x_1, \ldots, x_m$ erzeugt wird.) Ausserdem

$$z_i \mapsto y_i \in \pi_1(W, *) \ , \qquad z_i' \mapsto y_i \in \pi_1(W, *) \ .$$

Daraus kann man leicht herleiten: die Kofasersumme von

$$\pi_1(V, *) \leftarrow \pi_1(V \cap W, *) \rightarrow \pi_1(W, *)$$

wird schon von den $x_1, \ldots, x_m$ in $\pi_1(V, *)$ erzeugt, und die einzigen Relationen, die wir hinschreiben müssen, sind

$$\gamma_i x_{\ell(i)} \gamma_i^{-1} = (\gamma_i x_{u(i)}) x_{r(i)} (\gamma_i x_{u(i)})^{-1}$$

was glücklicherweise gleichbedeutend ist mit $x_{\ell(i)} = x_{u(i)} x_{r(i)} x_{u(i)}^{-1}$, was wiederum gleichbedeutend ist mit

$$x_{\ell(i)} x_{u(i)} = x_{u(i)} x_{r(i)} \ . \quad \square$$

Warnung: in manchen Quellen (zB Rolfsen) wird die Multiplikation in π_1 seitenverkehrt geschrieben (in Bezug auf die Schreibweise, die ich vorziehe); also manche schreiben ab, wo ich ba schreiben würde.

Vorlesung Donnerstag: Wiederholung, Übersicht usw.