05.07.2013

Notizen zur 12. Vorlesungswoche Knotentheorie SS 2012/13 (Weiss)

In der Montagsvorlesung standen noch ganz die Kategorien im Vordergrund. In der Donnerstagsvorlesung sollte es mehr um π_1 (Fundamentalgruppe von topologischen Räumen) gehen; allerdings habe ich Wert darauf gelegt, vieles über π_1 in Kategoriensprache zu sagen.

Mehr über Kategorien. Ich schreibe jetzt zur Abkürzung oft $\mathrm{mor}(a,b)$ statt $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a,b)$, wobei a,b Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$ sind.

Faserprodukte und Kofaserkoprodukte/Kofasersummen. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, a,b,c Objekte aus $\mathcal{C}$ und $f \in \mathrm{mor}(a,c)$, $g \in \mathrm{mor}(b,c)$:

$$a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b \ .$$

Unter einem Faserprodukt von $a \to c \leftarrow b$ versteht man ein Objekt d in $\mathcal{C}$ zusammen mit $p_1 \in \mathrm{mor}(d,a)$ und $p_2 \in \mathrm{mor}(d,b)$ so dass

- $f \circ p_1 = g \circ p_2 \in \mathrm{mor}(d,c)$;
- für jedes Objekt x aus $\mathcal{C}$ ist die Abbildung

  $$\mathrm{mor}(x,d) \longrightarrow \{\, (u,v) \in \mathrm{mor}(x,a) \times \mathrm{mor}(x,b) \mid f \circ u = g \circ v \,\}$$

  gegeben durch $h \mapsto (p_1 \circ h, p_2 \circ h)$ *bijektiv.*

Kofasersummen in $\mathcal{C}$ sind Faserprodukte in der entgegengesetzten Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Gegeben also a,b,c Objekte aus $\mathcal{C}$ und $f \in \mathrm{mor}(c,a)$, $g \in \mathrm{mor}(c,b)$:

$$a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b \ .$$

Unter einer Kofasersumme (einem Kofaserkoprodukt) von $a \leftarrow c \to b$ versteht man ein Objekt d in $\mathcal{C}$ zusammen mit $j_1 \in \mathrm{mor}(a,d)$ und $j_2 \in \mathrm{mor}(b,d)$ so dass

- $j_1 \circ f = j_2 \circ g \in \mathrm{mor}(c,d)$;
- für jedes Objekt x aus $\mathcal{C}$ ist die Abbildung

  $$\mathrm{mor}(d,x) \longrightarrow \{\, (u,v) \in \mathrm{mor}(a,x) \times \mathrm{mor}(b,x) \mid u \circ j_1 = v \circ j_2 \,\}$$

  gegeben durch $h \mapsto (h \circ j_1, h \circ j_2)$ *bijektiv.*

Notation: schwierig. Man kann notfalls $a \prod_c b$ schreiben für das Faserprodukt und $a \coprod_c b$ für die Kofasersumme.

Beispiele. Kategorie der Mengen: wir denken uns also Mengen S,T,U und Abbildungen

$$S \xrightarrow{f} U \xleftarrow{g} T \ .$$

Das Faserprodukt existiert; es ist die Menge

$$R = \{(s,t) \in S \times T \mid f(s) = g(t)\}$$

zusammen mit den Projektionsabbildungen $R \to S$ und $R \to T$ gegeben durch $(s,t) \mapsto s$ und $(s,t) \mapsto t$.
Oder wir denken uns Mengen und Abbildungen

$$S \xleftarrow{f} U \xrightarrow{g} T \ .$$

Die Kofasersumme existiert; wir können sie definieren als

$$(S \times \{0\}) \ \cup \ (T \times \{1\}) / \sim$$

wobei das Symbol $\sim$ bedeutet, dass wir eine Äquivalenzrelation auf der Menge $(S \times \{0\}) \ \cup \ (T \times \{1\})$ einführen, indem wir $(f(x), 0) \sim (g(x), 1)$ fordern. (Genauer gesagt, wir nehmen die kleinste Äquivalenzrelation, die diese Beziehungen enthält.) Wenn also zum Beispiel $S = \{1,2,3,4,5\}$ und $T = \{1,2,3,4\}$ und $U = \{a,b,c\}$ mit $f(a) = 1$ und $f(b) = f(c) = 2$ und $g(a) = g(b) = 5$ und $g(c) = 4$, dann hat die Kofasersumme sechs Elemente. (Wir bauen erst die disjunkte Vereinigung von S und T, mit neun Elementen; dann sollen wir einige davon als äquivalent betrachten, und es bleiben dann nur noch sechs Äquivalenzklassen.)
Kategorie der topologischen Räume: hier kann man die Faserprodukte und Kofasersummen so konstruieren, wie in der Kategorie der Mengen. Zum Beipiel denken wir uns wie vorher

$$S \xrightarrow{f} U \xleftarrow{g} T \ .$$

wobei jetzt aber die Mengen S, T, U mit Topologien ausgerüstet sind und die Abbildungen f, g stetig sind. Wir bilden das Faserprodukt $S \prod_U T$ wie vorher als Menge und fassen es als Unterraum von $S \prod T = S \times T$ mit der Produkttopologie auf. Damit hat es eine Topologie. Die Projektionsabbildungen von $S \prod_U T$ nach S und T sind stetig.
Oder wir denken uns wie vorher

$$S \xleftarrow{f} U \xrightarrow{g} T$$

wobei jetzt aber die Mengen S, T, U mit Topologien ausgerüstet sind und die Abbildungen f, g stetig sind. Wir bilden die Kofasersumme $S \coprod_U T$ als Menge (wie vorher) und rüsten sie aus mit der grössten Topologie, bei der die Abbildungen $j_1 \colon S \to S \coprod_U T$ und $j_2 \colon T \to S \coprod_U T$ gerade noch stetig sind. Das bedeutet, dass eine Teilmenge von $S \coprod_U T$ zu den ausgewählten gehört[1] genau dann, wenn ihre Urbilder unter j_1 und j_2 zu den ausgewählten

[1]... die wir *offen* nennen, nur zur Abkürzung ...

Teilmengen von S bzw T gehören[2].
Kategorie der Gruppen: Faserprodukte kann man wieder so wie in der Kategorie der Mengen konstruieren. Zum Beipiel denken wir uns wie vorher

$$S \xrightarrow{f} U \xleftarrow{g} T \ .$$

wobei jetzt aber die Mengen S, T, U mit Gruppenstrukturen ausgerüstet sind und die Abbildungen f, g Homomorphismen sind. Wir bilden das Faserprodukt $S \prod_U T$ wie vorher als Menge und fassen es als Untergruppe von $S \prod T = S \times T$ auf. Die Projektionsabbildungen von $S \prod_U T$ nach S und T sind Homomorphismen.
Kofasersummen in der Kategorie der Gruppen sind dagegen eine schwierige Sache. Sie sind für uns besonders wichtig. Wir schieben das ein bisschen auf, bis sich Mangelerscheinungen bemerkbar machen.

Bemerkung. Faserprodukte sind, grob gesprochen, eine Verallgemeinerung von Produkten und Kofaserkoprodukte sind, grob gesprochen, eine Verallgemeinerung von Koprodukten. Genauer: Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, die ein terminales Objekt z besitzt. Gegeben zwei Objekte a, b von $\mathcal{C}$. Dann haben wir

$$a \to z \leftarrow b$$

wobei die Pfeile (Morphismen) eindeutig sind, weil z terminal ist. Wenn das Faserprodukt $a \prod_z b$ existiert, dann kann es sich auch Produkt $a \prod b$ nennen.
Ähnlich: sei Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, die ein initiales Objekt y besitzt. Gegeben zwei Objekte a, b von $\mathcal{C}$. Dann haben wir

$$a \leftarrow y \to b$$

wobei die Pfeile (Morphismen) eindeutig sind, weil y initial ist. Wenn das Kofaserkoprodukt $a \coprod_y b$ existiert, dann kann es sich auch Koprodukt $a \coprod b$ nennen.
Aber: es kann passieren, dass in einer Kategorie $\mathcal{C}$ das Produkt (oder Koprodukt) von zwei Objekten a, b existiert, obwohl $\mathcal{C}$ kein terminales (oder initiales) Objekt besitzt. Ein Beispiel davon haben wir schon gesehen.

Gruppenobjekte und Kogruppenobjekte. Ein Gruppenobjekt in einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Objekt mit zusätzlicher Struktur, die an Gruppen erinnert. (Wir müssen das jetzt ohne Elemente formulieren — nur mit Objekten und Pfeilen.) Der Einfachheit halber soll angenommen werden, dass $\mathcal{C}$ ein terminales Objekt z hat und zu je zwei Objekten x, y ein Produkt $x \prod y$.

[2]... die wir *offen* nennen, nur zur Abkürzung ...

Def. Ein *Gruppenobjekt* in $\mathcal{C}$ ist ein Objekt a von $\mathcal{C}$ mit ausgewählten Morphismen

$$a \prod a \xrightarrow{\mu} a$$

$$a \xrightarrow{\gamma} a$$

$$z \xrightarrow{\eta} a$$

die die folgenden Eigenschaften haben sollen (siehe weitere Erklärungen unten):

- *Assoziativität*: das Diagramm

$$\begin{tikzcd} a \prod a \prod a \arrow[r, "(p_1, \mu \circ p_{23})"] \arrow[d, "(\mu \circ p_{12}, p_3)"] & a \prod a \arrow[d, "\mu"] \\ a \prod a \arrow[r, "\mu"] & a \end{tikzcd}$$

  ist kommutativ (d.h. die beiden Zusammensetzungen von links oben nach rechts unten sind gleich);
- *Inverses*: die Diagramme

$$\begin{tikzcd} a \prod a \arrow[r, "(p_1, \gamma \circ p_2)"] \arrow[d] & a \prod a \arrow[d, "\mu"] \\ z \arrow[r, "\eta"] & a \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \prod a \arrow[r, "(\gamma \circ p_1, p_2)"] \arrow[d] & a \prod a \arrow[d, "\mu"] \\ z \arrow[r, "\eta"] & a \end{tikzcd}$$

  sind kommutativ;
- *Neutrale Geschichte*: die Diagramme

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"] & z \prod a \arrow[d, "(\eta \circ p_1, p_2)"] \\ a & a \prod a \arrow[l, "\mu"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"] & a \prod z \arrow[d, "(p_1, \eta \circ p_2)"] \\ a & a \prod a \arrow[l, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

  sind kommutativ.

Erklärungen zu Bezeichnungen. Erstmal habe ich mir erlaubt, zu sagen: $(a \prod b) \prod c = a \prod (b \prod c)$. Das heisst, das Produkt von $a \prod b$ und c kann auch gut als Produkt von a und $b \prod c$ herhalten. (Kleine Übungsaufgabe.) Ich schreibe deswegen einfach $a \prod b \prod c$.
Es gibt gewisse ausgezeichnete Morphismen von $a \prod b \prod c$ nach a und b und c, die ich mit p_1, p_2 und p_3 bezeichnen würde. Es gibt aber auch ausgezeichnete Morphismen von $a \prod b \prod c$ nach $a \prod b$ und $b \prod c$ und $a \prod c$, die ich mit p_{12}, p_{23} und p_{13} bezeichnen würde.
Wenn ein Morphismus von der Form $v : x \to c \prod d$ gegeben ist, dann schreibe

ich ihn (hier) in der Form (f,g), wobei $f = p_1 \circ v$ und $g = p_2 \circ v$, und wobei $p_1 \in \mathrm{mor}(c \prod d, c)$ und $p_2 \in \mathrm{mor}(c \prod d, d)$ die Morphismen sind, die zum Produkt gehören. Wenn dabei x selber noch ein Produkt ist, wird es komplizierter! Also zum Beispiel:

$$(g \circ p_{12}, h \circ p_3) : u \prod v \prod w \longrightarrow c \prod d$$

ist sinnvoll, wenn $g \in \mathrm{mor}(u \prod v, c)$ und $h \in \mathrm{mor}(w, d)$ vorgegeben sind. Ausserdem wurde der ausgezeichnete Isomorphismus von a nach $a \prod z$ benutzt (das war auch eine kleine Übungsaufgabe).

Def. Ein *Kogruppenobjekt* in $\mathcal{C}$ ... ist ein Gruppenobjekt in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$. Das schreibe ich jetzt nicht aus! Wir müssen eben alle Pfeile umdrehen. Ausserdem brauchen wir nicht anzunehmen, dass $\mathcal{C}$ ein terminales Objekt besitzt, und dass für je zwei Objekte a, b von $\mathcal{C}$ ein Produkt $a \prod b$ existiert. Stattdessen nehmen wir an, dass $\mathcal{C}$ ein initiales Objekt besitzt und dass für je zwei Objekte a, b von $\mathcal{C}$ ein Koprodukt $a \coprod b$ existiert.

Langweilige Beispiele. Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der Mengen ist eine Menge S mit Abbildungen $\mu : S \times S \to S$ (wobei $S \times S = S \prod S$) und $\gamma \colon S \to S$ und $\eta : Z \to S$, wobei Z eine einpunktige Menge ist. Diese sollen Eigenschaften haben ... kurz gesagt, S wird dadurch zu einer Gruppe im traditionellen Sinn. Speziell ist η dazu da, das neutrale Element der Gruppe S auszuwählen, und γ ist die Abbildung, die für jedes $s \in S$ das Inverse wählt.
Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der topologischen Räume ist ein Raum Y (genauer Menge Y mit Topologie $\mathtt{U}$, die ich aber jetzt nicht unablässig deklarieren will) und Abbildungen $\mu \colon Y \times Y \to Y$, $\gamma \colon Y \to Y$ und $\eta \colon Z \to Y$ (wobei Z ein Ein-Punkt-Raum ist), die wieder Y zu einer Gruppe befördern, die aber zusätzlich noch die Eigenschaft der Stetigkeit haben sollen. Dabei hat $Y \times Y$ die Produkttopologie. (Diese Forderung betrifft μ und γ, wohingegen η automatisch stetig ist). Man sagt dann, dass Y eine *topologische Gruppe* ist.

Weniger langweilig. Ein Gruppenobjekt in der Kategorie der Gruppen ist ... (das war eine Übungsaufgabe).

Hochinteressant. Es gibt ein paar sehr wichtige *Kogruppenobjekte* in der Kategorie $\mathcal{HT}_*$ (topologische Räume mit Grundpunkt, mit Homotopieklassen als Morphismen). Diese Kategorie ist eine Variante von $\mathcal{HT}$ (topologische Räume, mit Homotopieklassen als Morphismen). Jetzt muss erstmal kurz erklärt werden, was $\mathcal{HT}_*$ ist ...
Die Kategorie $\mathcal{T}_*$ der topologischen Räume mit Grundpunkt hat folgende Objekte: topologische Räume $X = (X, \mathtt{U})$ mit einem ausgewählten Element

von X, das Grundpunkt heissen soll und oft mit $*$ bezeichnet wird (unabhängig davon, was X ist). Wir beschreiben Objekte manchmal in der Form $(X,*)$ oder einfach X; dabei bezeichnet jedenfalls $*$ den Grundpunkt (nicht die Topologie, die garkeine Bezeichnung mehr abbekommen hat). Ein Morphismus von $(X,*)$ nach $(Y,*)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit der Eigenschaft $f(*) = *$. So ein f heisst auch *punktierte Abbildung*, usw.
So weit, so gut; jetzt brauchen wir dazu ein Konzept von Homotopie. Wir nennen zwei punktierte Abbildungen $f, g : (X,*) \to (Y,*)$ *punktiert homotop* zueinander, wenn eine stetige Abbildung

$$F\colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

existiert derart, dass $F(x,0) = f(x)$ und $F(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$, und $F(*,t) = *$ für alle $t \in [0,1]$. Punktierte Homotopie ist wieder eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller stetigen punktierten Abbildungen von $(X,*)$ nach $(Y,*)$. Wir schreiben

$$[X,Y]_*$$

für die Menge der Äquivalenzklassen. Damit erhalten wir eine neue Kategorie $\mathcal{HT}_*$, deren Objekte wieder die punktierten Räume sind, mit

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{HT}_*}(X,Y) = [X,Y]_*$$

Die Zusammensetzung wird wieder durch Wahl von Repräsentanten definiert, also für $[f] \in [X,Y]_*$ und $[g] \in [Y,Z]_*$ setzen wir $[g] \circ [f] = [g \circ f]$. Man muss sich natürlich uberlegen, dass das wohldefiniert ist.
Kleine Warnung: Produkte in $\mathcal{T}_*$ un $\mathcal{HT}_*$ sind so wie in $\mathcal{T}$, aber Koprodukte sind etwas anders. Das Koprodukt von $(X,*)$ und $(Y,*)$ in $\mathcal{T}_*$ und auch in $\mathcal{HT}_*$ ist der Raum $X \vee Y$, der entsteht, wenn man die disjunkte Vereinigung von X und Y nimmt und dann die Grundpunkte von X und Y gleichsetzt (also genauer, Äquivalenzrelation einführen und Quotiententopologie nehmen ... eine Teilmenge von $X \vee Y$ gehört zu den ausgewählten, wenn ihr Schnitt mit X zu den ausgewählten Teilmengen von X gehört und ihr Schnitt mit Y zu den ausgewählten Teilmengen von Y gehört).
Jetzt zu den interessanten Kogruppenobjekten. Es stellt sich zB heraus, dass $(S^1,*)$ eine Kogruppenstruktur besitzt. Um das zu bestätigen, müssen wir hauptsächlich die *Komultiplikation*

$$\kappa : (S^1,*) \longrightarrow (S_1 \vee S_1,*)$$

erfinden. Wir können sie definieren durch die naheliegende Formel

$$\kappa(z) = \begin{cases} z^2 \text{ in der rechten Kopie von } S^1 & \text{falls Im } (z) \geq 0 \\ z^2 \text{ in der linken Kopie von } S^1 & \text{falls Im } (z) \leq 0 \end{cases}$$

Dabei habe ich komplexe Notation benutzt, also $S^1 \subset \mathbb{C}$. Das (Ko)Inverse erfordert keine grosse Fantasie:

$$\gamma\colon (S^1, *) \to (S^1, *)$$

kann definiert werden durch $\gamma(z) = \bar{z} = z^{-1}$. Und bei

$$\eta : (S^1, *) \longrightarrow (*, *)$$

haben wir nur eine Möglichkeit.
Jetzt muss einiges überprüft werden. Zum Beispiel erhalten wir durch Kombinieren von κ mit gewissen naheliegenden Inklusionen zwei interessante punktierte Abbildungen $S^1 \vee S^1 \to S^1 \vee S^1 \vee S^1$, und dann durch Zusammensetzen mit $\kappa : S^1 \to S^1 \vee S^1$ zwei punktierte (stetige) Abbildungen

$$S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^1 \vee S^1.$$

Die eine ist gegeben durch

$$z \mapsto \begin{cases} z^4 \text{ in der rechten Kopie von } S^1 & \text{falls Im } (z) \geq 0, \text{Im } (z^2) \geq 0 \\ z^4 \text{ in der mittleren Kopie von } S^1 & \text{falls Im } (z) \geq 0, \text{Im } (z^2) \leq 0 \\ z^2 \text{ in der linken Kopie von } S^1 & \text{falls Im } (z) \leq 0. \end{cases}$$

Die andere ist gegeben durch

$$z \mapsto \begin{cases} z^2 \text{ in der rechten Kopie von } S^1 & \text{falls Im } (z) \geq 0 \\ z^4 \text{ in der mittleren Kopie von } S^1 & \text{falls Im } (z) \leq 0, \text{Im } (z^2) \geq 0 \\ z^4 \text{ in der linken Kopie von } S^1 & \text{falls Im } (z) \leq 0, \text{Im } (z^2) \leq 0. \end{cases}$$

Es muss gezeigt werden, dass diese beiden zueinander *punktiert homotop* sind. (Keine grosse Sache, es sei denn, mir sind Druckfehler unterlaufen.) Damit haben wir Assoziativität bestätigt. Usw.; die Einzelheiten sollen hier nicht weiter ausgeführt werden.

Noch ein Begriff aus der Welt der Kategorien: Funktor. Wir denken uns Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$.
Def. Ein Funktor von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist eine Regel, die jedem Objekt c von $\mathcal{C}$ ein Objekt $F(c)$ von $\mathcal{D}$ zuordnet, und jedem Morphismus $g\colon c_0 \to c_1$ in $\mathcal{C}$ einen Morphismus $F(g) : F(c_0) \to F(c_1)$ in $\mathcal{D}$, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $F(g \circ h) = F(g) \circ F(h)$ (wann immer g und h zusammensetzbare Morphismen in $\mathcal{C}$ sind, also etwa $h\colon c_0 \to c_1$ und $g\colon c_1 \to c_2$);
- $F(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{F(c)}$ fuer jedes Objekt c in $\mathcal{C}$.

Beispiele. Es gibt einen Funktor V von Kategorie der Gruppen nach Kategorie der Mengen, der jeder Gruppe die unterliegende Menge und jedem Homomorphismus die unterliegende Abbildung zuordnet. Einen Funktor dieser Art nennt man *Vergiss-Funktor*.
Sei $\mathcal{C}$ irgendeine Kategorie, a ein festes Objekt in $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ die Kategorie

der Mengen. Dann haben wir einen Funktor $G_a : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, der definiert ist durch

$$G_a(c) = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, c)$$

und $G_a(f) = (g \mapsto f \circ g)$ für einen Morphismus $f : c_0 \to c_1$ in $\mathcal{C}$. (Hier ist $G_a(f)$ eine Abbildung von $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, c_0)$ nach $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, c_1)$. Sie ist gegeben durch Zusammensetzen mit f.)
Wenn $\mathcal{C}$ Koprodukte für je zwei Objekte besitzt, und ein initiales Objekt, und das Objekt a mit einer Kogruppenstruktur ausgerüstet ist, dann kann man diesen Funktor G_a befördern zu einem Funktor $\bar{G}_a$ von $\mathcal{C}$ nach Kategorie der Gruppen. Mit anderen Worten, die Menge $G_a(c) = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, c)$ ist dann eine Gruppe, und die Abbildungen $G(f)$, wie oben definiert, sind dann Homomorphismen von Gruppen. Und zwar geht das so: gegeben $g_1, g_2 \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, c)$. Wir erhalten ein eindeutiges Element $h \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a \coprod a, c)$ so dass $h \circ j_1 = g_1$ und $h \circ j_2 = g_2$, wobei j_1 und j_2 von a nach $a \coprod a$ die beiden Morphismen sind, die nunmal zum Koprodukt gehören. Wir sagen

$$g_1 \odot g_2 := h \circ \kappa \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, c)$$

wobei $\kappa \colon a \to a \coprod a$ die Komultiplikation vom Kogruppenobjekt a ist. Diese Verknüpfung $\odot$ ist die gewünschte Gruppenstruktur in $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, c) = G_a(c)$. Statt zu sagen *wir haben G zu $\bar{G}$ befördert* usw., sollte man eigentlich schreiben $G = V \circ \bar{G}$, wobei V der oben beschriebene Vergiss-Funktor ist.

Anwendung: Der Funktor π_1. Um es ganz kategorisch zu sagen: π_1 ist der Funktor $\bar{G}_a$ vom letzten Beispiel, wenn wir $\mathcal{C} = \mathcal{HT}_*$ setzen (Homotopiekategorie der punktierten topologischen Räume) und $a = (S^1, *)$. Wir hatten ja schon gesehen, dass dieses Objekt $a = (S^1, *)$ in $\mathcal{HT}_*$ eine Kogruppenstruktur besitzt.
Man kann das aber auch etwas auseinandernehmen. Für einen topologischen Raum X mit Grundpunkt $*$ ist demnach $\pi_1(X, *)$ als Menge so definiert: es ist die Menge der punktierten Homotopieklassen von punktierten stetigen Abbildungen von S^1 nach X. Die Gruppenstruktur ist so definiert: gegeben stetige punktierte Abbildungen

$$g_1, g_2 \colon S^1 \longrightarrow X \ .$$

Dann haben wir genau eine stetige punktierte Abbildung $h \colon S^1 \vee S^1 \to X$, die $h \circ j_1 = g_1$ und $h \circ j_2 = g_2$ erfüllt, wobei j_1 und j_2 die üblichen Inklusionen von S^1 nach $S^1 \vee S^1$ sind. Wir setzen

$$g_1 \odot g_2 = h \circ \kappa : S^1 \to X \ ,$$

wobei $\kappa : S^1 \to S^1 \vee S^1$ wie oben definiert (in der Beschreibung von Kogruppenstruktur von $(S^1, *)$. Die Verknüpfung

$$[g_1] \odot [g_2] := [g_1 \odot g_2] \in \mathrm{mor}_{\mathcal{HT}_*}(S^1, X)$$

ist dann wohldefiniert, assoziativ usw. (Ich habe hier einfach S^1 und X statt $(S^1, *)$ und $(X, *)$ geschrieben.)
Statt $\pi_1(X, *)$ schreibt und sagt man auch *Fundamentalgruppe* von X oder *erste Homotopiegruppe von* X. Es gibt auch noch höhere Homotopiegruppen von X ; das hängt damit zusammen, dass die Objekte $(S^n, *)$ von $\mathcal{HT}_*$, für beliebiges $n > 1$, auch Kogruppenstrukturen besitzen. Die erste Homotopiegruppe $\pi_1(X, *)$ wird als besonders interessant empfunden, weil sie im allgemeinen nicht kommutativ ist. Dagegen sind die Gruppen $\pi_n(X, *)$ für $n \geq 2$ kommutativ.

Methoden zur Berechnung von $\pi_1(X, *)$.
1. Einiges ergibt sich daraus, dass π_1 ein Funktor von $\mathcal{HT}_*$ nach Kategorie der Gruppen ist. Zum Beispiel: *wenn* $(X, *)$ *isomorph ist zu* $(Y, *)$ *in* $\mathcal{HT}_*$*, dann sind* $\pi_1(X, *)$ *und* $\pi_1(Y, *)$ *auch isomorph als Gruppen.* Aber was bedeutet das, $(X, *)$ isomorph zu $(Y, *)$ in $\mathcal{HT}_*$? Es bedeutet, dass punktierte stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ existieren derart, dass $g \circ f$ punktiert homotop zu id_X ist und $f \circ g$ punktiert homotop zu id_Y. Man sagt dann auch, dass X und Y punktiert *homotopieäquivalent* sind. Es ist manchmal garnicht leicht, zu entscheiden, ob das der Fall ist. Beispiel: jede sternförmige Teilmenge X von $\mathbb{R}^m$ (mit einem beliebigen Grundpunkt und mit der Unterraumtopologie versehen) ist isomorph in $\mathcal{HT}_*$ zu einem einpunktigen Raum; also ist $\pi_1(X, *)$ die triviale Gruppe. (Das kann man allerdings auch direkt aus der expliziten Beschreibung von $\pi_1(X, *)$ sehen.)
2. Angenommen, X ist nicht wegzusammenhängend. Sei $Y \subset X$ die Wegzusammenhangskomponente vom Grundpunkt. Dann ist $\pi_1(Y, *) \cong \pi_1(X, *)$. Mit anderen Worten, unsere Definition von $\pi_1(X, *)$ sieht nur den Teil Y von X. Das hängt damit zusammen, dass S^1 wegzusammenhängend ist.
3. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum mit Grundpunkt, G eine Gruppe und $\alpha\colon G \times X \longrightarrow X$ eine Wirkung der Gruppe G auf dem Raum X. (Wir schreiben oft $g \cdot x$ oder gx statt $\alpha(g, x)$, falls $g \in G$ und $x \in X$. Mit *Wirkung* ist gemeint: $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$ für alle $g_1, g_2 \in G$ und $x \in X$, und $1x = x$ für alle $x \in X$, wobei $1 \in G$ das neutrale Element bezeichnet. Hier verlangen wir auch, dass die Abbildung $x \mapsto gx$ für festes $g \in G$ stetig ist; dann muss sie ein Homöomorphismus sein, denn das Inverse ist $x \mapsto g^{-1}x$.) Wir wollen jetzt verlangen, dass diese Wirkung besonders *frei* ist. Mit *frei* meint man allgemein

$$gx \neq x$$

für alle $x \in X$ und $g \in G$, $g \neq 1$. Wir brauchen aber noch etwas mehr: jedes $x \in X$ soll eine offene Umgebung U_x in X besitzen, so dass

$$g \cdot U_x \cap h \cdot U_x = \emptyset$$

wann immer $g, h \in G$ mit $g \neq h$. Dabei ist $g \cdot U_x$ eine Abkürzung für die Teilmenge $\{gy \mid y \in U_x\}$ von X, usw. (Man nennt diese Eigenschaft der Wirkung wohl *free properly discontinuous* auf Englisch, aber wie es auf Deutsch heisst, weiss ich nicht.)
Die Wirkung von G auf X bestimmt eine Äquivalenzrelation auf der Menge X wie folgt: $x, y \in X$ sind äquivalent genau dann, wenn $y = gx$ für irgendein $g \in G$. (Die Äquivalenzklassen heissen *Bahnen* der Wirkung, englisch *Orbits of the action.*) Jetzt sei X/G die Menge der Äquivalenzklassen. Wir machen eine *Quotiententopologie* auf X derart, dass $V \subset X/G$ offen ist (zu den ausgewählten Teilmengen gehört) genau dann, wennn das Urbild von V in X offen ist (zu den ausgewählten Teilmengen gehört). Zum Glück hat X/G einen Grundpunkt, nämlich das Bild vom Grundpunkt in X. Wir haben eine Projektion

$$p : (X, *) \longrightarrow (X/G, *)$$

die einen Homomorphismus der Fundamentalgruppen bestimmt,

$$\pi_1(X, *) \to \pi_1(X/G, *) \ .$$

Satz 1. *Dieser Homomorphismus $\pi_1(X, *) \to \pi_1(X/G, *)$ ist injektiv, sein Bild ist eine normale Untergruppe von $\pi_1(X/G, *)$ und die zugehörige Quotientengruppe ist isomorph zu G.*
Den letzten Teil des Satzes (nach *injektiv* und *normal*) kann man etwas besser so verstehen. Sei $z = * \in X$. Für $g \in G$ wählen wir irgendeinen stetigen Weg ω in X von z nach gz (es muss möglich sein, weil X wegzusammenhängend). Wir projizieren ω nach X/G und haben damit einen Weg von $*$ nach $*$ in X/G, also ein Element $\psi(g)$ von $\pi_1(X/G, *)$. Das hängt allerdings nicht nur von g ab, sondern auch von ω. Wenn wir eine andere Wahl ω' treffen, dann können wir den Unterschied zwischen ω und ω' als ein Element in $\pi_1(X, *)$ auffassen. Kurz, $\psi(g)$ hängt doch nur von g ab, wenn wir es als Nebenklasse auffassen für die Untergruppe *Bild von* $\pi_1(X, *)$ in $\pi_1(X/G, *)$. Es wird behauptet, dass die so definierte Abbildung ψ von G in die Menge dieser Nebenklassen bijektiv ist.
Ein paar leichte Anwendungen von diesem Satz wurden gegeben; siehe weiter unten.
4. Sei X ein punktierter topologischer Raum, $X = V \cup W$ wobei V, W offen in X und $* \in V \cap W$. Dann können wir sagen, dass $(X, *)$ die Kofasersumme von $(V, *)$ und $(W, *)$ unter $(V \cap W, *)$ ist (in der Kategorie $\mathcal{T}_*$ der punktierten topologischen Räume). Damit ist nur ausgedrückt: gegeben stetige punktierte Abbildungen von V und W in einen anderen punktierten Raum Y, die auf $V \cap W$ übereinstimmen ... dann existiert genau eine stetige punktierte Abbildung von X nach Y, die mit den gegebenen auf V und W übereinstimmt. Es stellt sich heraus, dass der Funktor π_1 diese spezielle

Kofasersumme von Räumen in eine Kofasersumme von Gruppen überführt (unter einer milden zusätzlichen Bedingung).

Satz 2 (Seifert-vanKampen). *Wenn V, W und $V \cap W$ auch noch wegzusammenhängend sind, dann ist $\pi_1(X,*)$ die Kofasersumme (in der Kategorie der Gruppen) von $\pi_1(V,*)$ und $\pi_1(W,*)$ unter $\pi_1(V \cap W,*)$.*

Genauer sollte man das so formulieren. Weil π_1 ein Funktor ist, gibt es auf jeden Fall ein kommutatives Diagramm von Gruppen und Homomorphismen

$$\begin{tikzcd} \pi_1(V \cap W,*) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"] & \pi_1(V,*) \arrow[d, "d"] \\ \pi_1(W,*) \arrow[r, "b"] & \pi_1(X,*) \end{tikzcd}$$

in dem die Pfeile a, b, c, d durch Inklusionen bestimmt sind (wie zum Beispiel $V \hookrightarrow X$). Kommutativ bedeutet hier nur, dass $d \circ a = b \circ c$. Es wird folgendes behauptet: Gegeben irgendeine Gruppe G und Homomorphismen $q : \pi_1(V,*) \to G$ und $r : \pi_1(W,*) \to G$, die die Bedingung $q \circ a = r \circ c$ erfüllen. Dann existiert genau ein Homomorphismus $u : \pi_1(X,*) \to G$ mit den Eigenschaften $u \circ d = q$ und $u \circ b = r$.

Das bedeutet, dass wir eine Formel für $\pi_1(X,*)$ haben, wenn wir die Gruppen $\pi_1(V \cap W,*)$, $\pi_1(V,*)$, $\pi_1(W,*)$ *und* die Homomorphismen a und c (wie im Diagramm) schon irgendwie ausgerechnet haben.

Leider hatte ich noch keine Zeit, diese Formel zu erklären, das heisst also, Kofasersummen in der Kategorie der Gruppen zu beschreiben. Das muss gleich Anfang der nächsten Woche geschehen.

Anwendungen von Satz 1. Ein wichtiger und einfacher Fall ist $X = \mathbb{R}$, Grundpunkt $0 \in \mathbb{R}$, mit $G = \mathbb{Z}$ und der Wirkung $\alpha(z,x) = z + x$ für $z \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann ist X/G homöomorph zu S^1; die Bahn von $t \in \mathbb{R}$ entspricht dem Element $e^{2\pi i t} \in S^1$. Da $\mathbb{R}$ isomorph zu einem Einpunktraum ist in $\mathcal{HT}_*$, wissen wir schon, dass $\pi_1(\mathbb{R},*)$ die triviale Gruppe ist. Also folgt aus Satz 1, dass $\pi_1(S^1,*)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

Ein anderer bekannter Fall ist $X = S^2$ mit irgendeinem Grundpunkt, $G = \mathbb{Z}/2$, wobei das nichttriviale Element T von $\mathbb{Z}/2$ antipodisch wirkt: also $Tx = -x$ fuer $x \in S^2$. Dann ist X/G die projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$. Leider wissen wir noch nicht, dass $\pi_1(S^2,*)$ die triviale Gruppe ist. Es kann aber leicht aus dem Satz von Seifert-VanKampen (Satz 2) hergeleitet werden; also benutze ich es jetzt. Damit folgt aus unserem Satz 1, dass $\pi_1(\mathbb{R}P^2,*)$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2$ ist.