01.07.2013

Notizen zur 11. Vorlesungswoche Knotentheorie SS 2012/13 (Weiss)

Der Plan für die letzten drei Wochen ist ungefähr so: ich erzähle etwas über Knotentheorie im Wandel der Zeiten. Ich nehme das auch zum Anlass, viel Ideologisches aus dem Bereich Kategorientheorie zu verbreiten. Es wird schrecklich viele Definitionen geben, kaum Bilder, wenige Sätze und noch weniger Beweise. Wichtige Stichworte sind:

- Aus der Theorie der Kategorien: Kategorie, Objekt, Morphismus, Funktor, Gruppenobjekt, Kogruppenobjekt, Produkt, Koprodukt, Pullback (= Faserprodukt), Pushout (=Kofaserkoprodukt oder Kofasersumme).
- Aus der elementaren algebraischen Topologie: Fundamentalgruppe, Satz von Seifert-vanKampen, Präsentation einer Gruppe.
- Aus der Knotentheorie: Wirtinger-Präsentation, Alexandermodul.

Obwohl das Alexanderpolynom eines Knotens eine Erfindung ist, die schon 1928 gemacht wurde (J Alexander), brach das eigentliche Polynomfieber in der Knotentheorie erst 1984 mit der Entdeckung des Jonespolynoms aus (Vaughan Jones). Diese Entwicklung nach 1984 hat zu einer Umformulierung der älteren Knotentheorie geführt, so dass zB auch bei der Konstruktion des Alexanderpolynoms die Knotendiagramme im Vordergrund stehen, und damit Begriffe wie die Reidemeisterzüge, Färben usw. Das war aber nicht immer so. In Dale Rolfsen's Buch über Knotentheorie von 1974, damals ein Standardwerk, sind die Reidemeisterzüge überhaupt nicht erwähnt. Die ursprüngliche Konstruktion des Alexanderpolynoms geht in folgenden Etappen vor sich: Knoten K in $\mathbb{R}^3$ oder S^3 bestimmt Knotenkomplement $\mathbb{R}^3 \smallsetminus K$ oder $S^3 \smallsetminus K$, dieses hat Fundamentalgruppe G, diese hat *abgeleitete Reihe* (engl. *derived series*) von Untergruppen

$$G = G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset G^{(3)} \supset \cdots ,$$

und daraus machen wir den Alexandermodul $G^{(1)}/G^{(2)}$ mit der Wirkung von $G^{(0)}/G^{(1)} \cong \mathbb{Z}$ ... und dann endlich das Fittingideal vom Alexandermodul, das ein Hauptideal im Ring $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ ist, mit dem Alexanderpolynom als Erzeuger. Hier sind jetzt schon viele Begriffe vorweggenommen, die noch erklärt werden müssen; wenn sie erklärt sind, wird es trotzdem noch nicht klar sein, was diese Definition des Alexanderpolynoms mit der zu tun hat, die wir gesehen haben. Darum soll es also in diesen letzten drei Wochen gehen.

Kategorien (Eilenberg-MacLane, etwa 1945.) Ein Buch dazu: S MacLane, *Categories for the working mathematician*, Springer 1971.

Def. Eine *kleine Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus einer Menge $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und, zu jeder Wahl von $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, einer Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$. Ausserdem sollen gegeben sein

- für jedes $a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ein ausgezeichnetes Element $\mathrm{id}_a \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, a)$;
- für alle $a, b, c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine Abbildung

$$\circ : \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, c) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, c).$$

  Wir schreiben dafür meistens $g \circ f$ statt $\circ(g, f)$ und denken *Zusammensetzung.*

Für die Zusammensetzungsoperation $\circ$ soll gelten: $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$, also Assoziativiatät, wobei etwa $g \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c, d)$ und $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, c)$ und $h \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$; ausserdem $\mathrm{id}_b \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_a$ für jedes $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$, bei beliebigen $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
Bei einer Kategorie $\mathcal{C}$ schlechthin (ohne das Wort *klein*) erlauben wir, dass $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ eine "Klasse" ist (also nicht den Einschränkungen unterworfen ist, die mit dem Wort *Menge* verbunden sind). Alles andere ist wie oben; speziell soll $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$ immer noch eine Menge sein für beliebige a und b aus $\mathcal{C}$.
Vokabular: Ein Element von $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ heisst *Objekt* von $\mathcal{C}$. Ein Element f von $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$ heisst *Morphismus* von Objekt a nach Objekt b. So ein Morphismus wird oft durch einen Pfeil beschrieben; also $f : a \to b$ ist eine andere Art, $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$ zu sagen.

Die meisten Beispiele, die einem zuerst einfallen, sind *grosse* Kategorien. Das Ur-Beispiel ist die *Kategorie der Mengen*, nennen wir sie $\mathcal{S}$. Die Objekte sind in diesem Fall die Mengen. Die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{S}}(X, Y)$ ist einfach die Menge aller Abbildungen von Menge X nach Menge Y. Die Zusammensetzung $\circ$ ist einfach die Zusammensetzung von Abbildungen. Der Identitätsmorphismus $\mathrm{id}_X \in \mathrm{mor}_{\mathcal{S}}(X, X)$ ist einfach die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$.
Ein weiteres naheliegendes Beispiel ist die Kategorie der Gruppen, nennen wir sie $\mathcal{G}$. Die Objekte sind in diesem Fall die Gruppen. Die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{S}}(G, H)$ ist die Menge aller Homomorphismen von Gruppe G nach Gruppe H. Die Zusammensetzung $\circ$ ist die Zusammensetzung von Homomorphismen. Für eine Gruppe K ist $\mathrm{id}_K \in \mathrm{mor}_{\mathcal{S}}(K, K)$ der Identitätshomomorphismus $\mathrm{id}_K : K \to K$.

Ein drittes Standardbeispiel ist die Kategorie der topologischen Räume[1], nennen wir sie $\mathcal{T}$. Die Objekte sind in diesem Fall die topologischen Räume $(X, \mathtt{U})$. Die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{T}}((X, \mathtt{U}), (Y, \mathtt{V}))$ ist die Menge aller stetigen Abbildungen von $(X, \mathtt{U})$ nach $(Y, \mathtt{V})$. Die Zusammensetzung $\circ$ ist die Zusammensetzung von stetigen Abbildungen. Für einen topologischen Raum $(X, \mathtt{U})$ ist $\mathrm{id}_{(X,\mathtt{U})} \in \mathrm{mor}_{\mathcal{S}}((X, \mathtt{U}), (X, \mathtt{U}))$ die Identitätsabbildung.

Die Kategorien in diesen Standardbeispielen beschreiben, jede für sich, die "soziologischen" Aspekte einer grösseren mathematischen Theorie (so beschreibt die Kategorie der Gruppen gewisse Aspekte der Grupentheorie ... man interessiert sich dafür, wie eine Gruppen mit anderen Gruppen durch Homomorphismen "kommuniziert", ohne viel zu fragen, was eine Gruppe eigentlich ist). Ausserdem sind die Objekte in diesen Beispielen Mengen mit zusätzlicher Struktur, und die Morphismen sind strukturerhaltende Abbildungen zwischen diesen Mengen. Es gibt aber auch Beispiele von Kategorien, die nicht von dieser Art sind.

Jede Gruppe G bestimmt eine kleine Kategorie $\mathcal{C}$ mit nur einem Objekt $*$ und $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(*, *) = G$. Wir benutzen die Multiplikation in G, um die Zusammensetzung von Morphismen aus $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(*, *)$ zu definieren, nämlich $f \circ g = fg$ falls $f, g \in G = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(*, *)$. Das neutrale Element von G dient als Identitätsmorphismus von $* \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
Jede geordnete Menge $(X, \leq)$ bestimmt eine kleine Kategorie $\mathcal{D}$ mit Objektmenge $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) = X$. Wir bestimmen, dass für $x, y \in X$ die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x, y)$ genau ein Element haben soll (Name ist mir egal), wenn $x \leq y$, und sonst leer sein soll. Man überlegt sich, dass damit die Zusammensetzung schon bestimmt ist, denn für beliebige $x, y, z \in X$ gibt es genau eine Abbildung

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(y, z) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x, y) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x, z)$$

[1]Ein topologischer Raum besteht aus einer Menge X und einer Teilmenge $\mathtt{U}$ der Potenzmenge $\mathtt{P}(X)$, die gewisse Bedingungen erfüllt. Eine stetige Abbildung von einem topologischen Raum $(X, \mathtt{U})$ in einen anderen topologischen Raum $(Y, \mathtt{V})$ ist (Def.) eine Abbildung f von Menge X nach Menge Y mit der Eigenschaft, dass für jedes $Z \in \mathtt{V}$ das Urbild $f^{-1}(Z) = \{x \in X \mid f(x) \in Z\}$ ein Element von $\mathtt{U}$ ist.
Wenn Sie mit topologischen Räumen nicht besonders vertraut sind, aber mit metrischen Räumen gut vertraut sind, empfehle ich folgende Übung, die Ihnen wahrscheinlich schonmal vorgeführt worden ist. Es gibt eine Standardprozedur, mit der man aus einem metrischen Raum (X, d) einen topologischen Raum $(X, \mathtt{U})$ macht. Wie geht das? Versuchen Sie, die Prozedur zu beschreiben, ohne das Wort *offen* zu benutzen. Denn dieses Wort kommt in der Definition von *metrischer Raum* nicht vor und sollte auch in der Definition von *topologischer Raum* nicht vorkommen. (Es wird *nach* den Definitionen eingeführt als praktische Abkürzung.)

und diese nehmen wir. (Der Fall $x \leq y$ und $y \leq z$ ist interessant; dann sind sowohl $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(y,z) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,y)$ als auch $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,z)$ einelementige Mengen. In allen anderen Fällen ist $\mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(y,z) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{D}}(x,y) = \emptyset$.)

Ein weiteres Beispiel einer Kategorie ist $\mathcal{HT}$, die *Homotopiekategorie der topologischen Räume*, die in der algebraischen Topologie wichtig ist. Dazu brauchen wir eine Definition.

Def. Gegeben topologische Räume $X = (X, \mathtt{U})$ und $Y = (Y, \mathtt{V})$. Zwei stetige Abbildungen f und g von X nach Y heissen *homotop* (zueinander), wenn es eine stetige Abbildung $F\colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ gibt mit den Eigenschaften $F(x,0) = f(x)$ und $F(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$. (Dieses f heisst dann auch *Homotopie von f nach g*.)

Kleiner Satz plus Def. *Die Homotopierelation ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y. Wir schreiben $[X,Y]$ für die Menge der Äquivalenzklassen. Wir schreiben manchmal $[f] \in [X,Y]$ für die Äquivalenzklasse (auch Homotopieklasse genannt) einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$.*
*Ausserdem: für topologische Räume X, Y, Z ist eine Zusammensetzungsoperation $\circ : [Y,Z] \times [X,Y] \longrightarrow [X,Z]$ wohl*definiert durch $[g] \circ [f] := [g \circ f]$.

Beweis-Skizze. Gegeben stetige Abbildungen $f, g, h : X \to Y$ und Homotopien $F\colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ von f nach g sowie $G\colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ von g nach h. (Das bedeutet $F(x,0) = f(x)$ und $F(x,1) = g(x)$ und $G(x,0) = g(x)$ und $G(x,1) = h(x)$ für alle $x \in X$; ausserdem sind F und G auch stetig.) Wir definieren

$$W\colon X \times [0,1] \to Y$$

durch $W(x,t) = F(x,2t)$ falls $t \leq 1/2$ und $W(x,t) = G(x,2t-1)$ falls $t \geq 1/2$. Dann ist W stetig und wohldefiniert (wegen $W(x,1/2) = F(x,1) = g(x) = G(x,0) = W(x,1/2)$ hauptsächlich) und stellt eine Homotopie von f nach h dar. Damit ist die Transitivität der Homotopierelation gezeigt. Symmetrie: gegeben stetige $f, g : X \to Y$ und eine Homotopie

$$F\colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

von f nach g. Dann ist $G\colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ definiert durch $G(x,t) = F(x,1-t)$ eine Homotopie von g nach f. Reflexivität: Für stetiges f von X nach Y ist $F\colon X \to Y$ gegeben durch $F(x,t) = f(x)$ eine Homotopie von f nach f.
Zusammensetzung: gegeben zwei stetige Abbildungen $f_0, f_1\colon K \to X$, die zueinander homotop sind und zwei stetige Abbildungen $g_0, g_1\colon X \to Y$, die zueinander homotop sind. Wir wollen zeigen, dass $g_0 \circ f_0$ homotop zu $g_1 \circ f_1$ ist. Man zeigt erst $g_0 \circ f_0$ homotop zu $g_0 \circ f_1$ und dann $g_0 \circ f_1$ homotop zu

$g_1 \circ f_1$. Dann kann man die Transitivität der Homotopierelation ausnutzen, die ja schon gezeigt worden ist. $\square$

Mehr Vokabular. Eine wichtige Vokabel in der Kategorientheorie ist *Isomorphismus.* Sei also $\mathcal{C}$ eine Kategorie und a, b Objekte in $\mathcal{C}$ und $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, b)$. Wir sagen, dass f ein *Isomorphismus* ist, wenn ein $g \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, a)$ existiert mit den Eigenschaften $f \circ g = \mathrm{id}_b \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, b)$ und $g \circ f = \mathrm{id}_a \in \mathrm{mor}(a, a)$. (So ein g ist dann auch eindeutig — kleine Übungsaufgabe.) Wenn es einen Isomorphismus von a nach b gibt, dann sagen wir auch, dass a und b isomorph sind.
In den "klassischen" Kategorien haben die Isomorphismen manchmal alte, traditionelle Namen. Zum Beispiel heissen die Isomorphismen in der Kategorie der Mengen *Bijektionen.* Die Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume nennt man *Homöomorphismen.* In der Kategorie der Gruppen dagegen heissen die Isomorphismen einfach *Isomorphismen.*
Sei $\mathcal{C}$ irgendeine Kategorie. Wir bauen eine neue Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ mit $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Für a, b in $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ setzen wir

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(a, b) = \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(b, a) \ .$$

Ausserdem definieren wir $\mathrm{id}_a \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(a, a)$ so, dass es dasselbe ist wie $\mathrm{id}_a \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, a)$. Das weitere kann man sich denken ...
Ein Objekt z einer Kategorie $\mathcal{C}$ heisst *terminal*, wenn für jedes Objekt a in $\mathcal{C}$ die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(a, z)$ genau ein Element hat. Ein Objekt z einer Kategorie $\mathcal{C}$ heisst *initial*, wenn für jedes Objekt a in $\mathcal{C}$ die Menge $\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(z, a)$ genau ein Element hat.
Beispiele dazu: In der Kategorie der Mengen ist jede einelementige Menge terminal. Die leere Menge ist ein initiales Objekt. In der Kategorie der Gruppen ist die triviale Gruppe (mit nur einem Element) sowohl ein terminales als auch ein initiales Objekt. In der Kategorie der topologischen Räume sind die terminalen und initialen Objekte so wie in der Kategorie der Mengen: jeder Einpunkt-Raum ist terminal, der leere Raum ist initial. Wenn wir eine Kategorie $\mathcal{C}$ aus einer geordneten Menge $(X, \leq)$ machen, wie oben beschrieben, dann ist ein terminales Objekt dasselbe wie ein Element $z \in X$, das $y \leq z$ für *alle* $y \in X$ erfüllt. Ein initiales Objekt in dieser Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Element $z \in X$, das $z \leq y$ für *alle* $y \in X$ erfüllt.

Produkte und Koprodukte. **Def.** Gegeben Objekte c und d in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein *Produkt* von c und d besteht aus einem Objekt e in $\mathcal{C}$ und ausgewählten Morphismen $p_1 : e \to c$, $p_2 : e \to d$ mit der folgenden Eigenschaft: für jedes Objekt x von $\mathcal{C}$ ist die Abbildung

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, e) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, c) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, d)$$

definiert durch $f \mapsto (p_1 \circ f, p_2 \circ f)$ eine *Bijektion*. Wir schreiben dann

$$e = c \prod d$$

oder ähnlich.
Analog dazu: Ein *Koprodukt* von c und d besteht aus einem Objekt e in $\mathcal{C}$ und ausgewählten Morphismen $j_1 : c \to e$, $j_2 : d \to e$ mit der folgenden Eigenschaft: für jedes Objekt x von $\mathcal{C}$ ist die Abbildung

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(e, x) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(c, x) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(d, x)$$

definiert durch $f \mapsto (f \circ j_1, f \circ j_2)$ eine *Bijektion*. Wir schreiben dann

$$e = c \coprod d$$

oder ähnlich.

Beispiele: In der Kategorie der Mengen gibt es für je zwei Objekte S und T ein Produkt. Wir schreiben dafür normalerweise $S \times T$ und haben natürlich die Projektionsabbildungen $p_1 \colon S \times T \to S$ und $p_2 \colon S \times T \to T$, die auch dazugehören.
In der Kategorie der Mengen gibt es für je zwei Objekte S und T ein Koprodukt. Wir nennen es oft die *disjunkte Vereinigung* von S und T und können es zB definieren durch

$$S \coprod T = S \times \{0\} \ \cup \ T \times \{1\}.$$

Dazu gehören die Abbildungen $j_1 : S \to S \coprod T$ und $j_2 : T \to S \coprod T$ definiert durch $j_1(s) = (s, 0)$ und $j_2(t) = (t, 1)$.
In der Kategorie der topologischen Räume sieht es ähnlich aus. Für je zwei topologische Räume $(X, \mathtt{U})$ und $(Y, \mathtt{V})$ gibt es ein Produkt. Es ist $X \times Y$ mit der Produkttopologie, die von $\mathtt{U}$ und $\mathtt{V}$ bestimmt wird. Dazu gehören natürlich auch die (stetigen) Projektionsabbildungen

$$p_1 \colon X \times Y \to X \ , \qquad p_2 \colon X \times Y \to Y \ .$$

Für je zwei topologische Räume $(X, \mathtt{U})$ und $(Y, \mathtt{V})$ gibt es ein Koprodukt. Es ist die disjunkte Vereinigung $X \coprod Y$ mit Abbildungen $j_1 : X \to X \coprod Y$ und $j_2 \colon Y \to X \coprod Y$ wie oben und der Topologie $\mathtt{W}$, die definiert wird durch

$$(S \in \mathtt{W}) \quad \Leftrightarrow \quad (j_1^{-1}(S) \in \mathtt{U} \text{ und } j_2^{-1}(S) \in \mathtt{V}) \ .$$

In der Kategorie der Gruppen gibt es für je zwei Objekte G und H ein Produkt. Es ist die Gruppe, die man üblicherweise mit $G \times H$ bezeichnet. Die Projektionsabbildungen $G \times H \to g$ und $G \times H \to H$ gehören auch dazu und sind natürlich Homomorphismen.
Viel interessanter als diese Beispiele ist das Koprodukt in der Kategorie der Gruppen. Für je zwei Gruppen G und H existiert das Koprodukt von G und H. Es wird oft mit $G * H$ bezeichnet und wird auch das *freie Produkt* von G

und H genannt (nicht empfehlenswert, besser *Koprodukt* sagen). Beachten, dass die disjunkte Vereinigung von G und H (als Mengen) dafür nicht in Frage kommt, weil nicht zu sehen ist, wie das eine Gruppe wäre. Um nun also $G * H$ zu konstruieren, betrachten wir Worte

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_r$$

in denen die Buchstaben $x_1, \dots, x_r$ aus der disjunkten Vereinigung von G und H genommen werden. (Im folgenden wird so getan, als ob G und H von vornherein disjunkt sind, und wir reden dann einfach von der Vereinigung $G \cup H$.) Die Zahl der Buchstaben, hier r, kann eine beliebige ganze Zahl ≥ 0 sein. Wir führen eine Äquivalenzrelation auf der Menge dieser Worte ein, indem wir sagen

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_{k-1} x_k x_{k+1} x_{k+2} \dots x_r \sim x_1 x_2 x_3 \dots x_{k-1} y x_{k+2} \dots x_r$$

falls $x_k, x_{k+1} \in G$ und $y = x_k x_{k+1}$ in G, und auch falls $x_k, x_{k+1} \in H$ und $y = x_k x_{k+1}$ in H. Ausserdem bestimmen wir

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_{k-1} x_k x_{k+1} \dots x_r \sim x_1 x_2 x_3 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_r$$

falls $x_k = 1 \in G$ oder $x_k = 1 \in H$. (Wir nehmen dann die kleinste Äquivalenzrelation, die alle diese Beziehungen enthält.) Die Menge der so gearteten Äquivalenzklassen von Worten soll $G * H$ heissen. Sie hat eine Verknüpfung, die durch Hintereinanderschreiben von Worten definiert ist:

$$[x_1 x_2 x_3 \dots x_r] \cdot [y_1 y_2 y_3 \dots y_s] = [x_1 x_2 x_3 \dots x_r y_1 y_2 y_3 \dots y_s].$$

Es ist kein grosses Problem, zu zeigen, dass die Verknüpfung wohldefiniert und assoziativ ist. Die Äquivalenzklasse vom leeren Wort ist ein neutrales Element dafür. Es ist auch nicht schwer zu zeigen, dass $G * H$ auf diese Weise eine Gruppe wird, denn das Inverse zu $[x_1 x_2 x_3 \dots x_r]$ ist

$$[x_r^{-1} x_{r-1}^{-1} \dots x_2^{-1} x_1^{-1}].$$

Wir haben Homomorphismen $j_1 \colon G \to G * H$ und $j_2 : H \to G * H$, die jedem Element von G bzw H das ein-buchstabige Wort zuordnen, das diesem Element entspricht. Um zu zeigen, dass $G * H$ mit dieser Wahl von j_1 und j_2 ein Koprodukt von G und H ist, müssen wir uns eine weitere Gruppe L denken und Homomorphismen $f_1 : G \to L$ und $f_2 : H \to L$. Gibt es genau einen Homomorphismus $v : G * H \to L$ mit den Eigenschaften $v \circ j_1 = f_1$ und $v \circ j_2 = f_2$? Die Antwort ist ja, denn wir müssen und können v nur definieren durch

$$[x_1 x_2 x_3 \dots x_r] \mapsto f_{i_1}(x_1) \cdot f_{i_2}(x_2) \cdots f_{i_r}(x_r) \in L$$

wobei $i_t = 1$ wenn $x_t \in G$ und $i_t = 2$ wenn $x_t \in H$.

Eindeutigkeit von Produkten und Koprodukten. Gegeben Objekte c, d und x in einer Kategorie $\mathcal{C}$ und Morphismen $p_1 : x \to c$, $p_2 : x \to d$, so dass x mit p_1 und p_2 sich Produkt von c und d nennen darf. Ausserdem sei gegeben ein anderes Objekt y in $\mathcal{C}$ und Morphismen $q_1 : y \to c$ und $q_2 \colon y \to d$, so dass y mit q_1 und q_2 sich auch Produkt von c und d nennen darf. *Dann ist x isomorph zu y.* Der Beweis ist ziemlich mechanisch und soll deshalb nur angedeutet werden. Weil x usw ein Produkt von c und d ist, ist speziell die Abbildung

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(y, x) \longrightarrow \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(y, c) \times \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(y, d)$$

gegeben durch $f \mapsto (p_1 \circ f, p_2 \circ f)$ bijektiv. Deswegen hat die "Gleichung" $(p_1 \circ f, p_2 \circ f) = (q_1, q_2)$ genau eine Lösung $f \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(y, x)$. Ebenso (Rollen von x und y vertauschen) finden wir ein ausgezeichnetes $g \in \mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, y)$. Dann stellt sich heraus, dass $g \circ f = \mathrm{id}_y$ und $f \circ g = \mathrm{id}_x$.

Ähnlich beweist man, dass ein Koprodukt von zwei Objekten c und d in einer Kategorie $\mathcal{C}$ bis auf Isomorphismus eindeutig ist, wenn es überhaupt existiert.