25.06.2013

Notizen zur 10. Vorlesungswoche Knotentheorie SS 2012/13 (Weiss)

Das Montagsthema war: Die Knäuelrelation für das Jonespolynom einer orientierten Verschlingung. Sie ist an vielen Stellen gut aufgeschrieben und erklärt, also nur weniges dazu.
Wir denken uns ein orientiertes Verschlingungsdiagramm L_+ und einen Doppelpunkt des Diagramms, an dem die Richtungsvektoren der beiden Zweige, in der Reihenfolge Überkreuzender-Unterkreuzender, eine positive geordnete Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden. Wenn wir in diesem Diagramm die Rollen von überkreuzendem und unterkreuzendem Zweig vertauschen, erhalten wir ein anderes orientiertes Diagramm L_- . Wenn wir den Doppelpunkt entfernen/auflösen, erhalten wir ein drittes orientiertes Diagramm L_0. (Es gibt nur eine Art, ihn so aufzulösen, dass die Orientierung überlebt.) Dann gilt für die Jonespolynome die Knäuelrelation

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(L_0) = 0 \ .$$

Der Beweis folgt leicht aus einer ähnlichen Beziehung für das Klammerpolynom (siehe Notizen zur 9. Vorlesungswoche); gut nachzulesen bei Sanderson oder Lickorish. Im Übungsblatt 10 wird angedeutet, wie man die Knäuelrelation für die (rekursive) Berechnung von Jonespolynomen benutzen kann. Es wird auch behauptet, dass das Jonespolynom durch die Knäuelrelation und ein paar zusätzliche naheliegende Axiome charakterisiert werden kann.

Donnerstagsthema: Ziel war, die Anzahl der Doppelpunkte in einem orientierten Verschlingungsdiagramm D zu vergleichen mit (abzuschätzen durch) die Breite $B(V(D))$ des Jonespolynoms von D. (Ich schreibe jetzt *Jonespolynom von* D, obwohl ich vielleicht schreiben sollte *Jonespolynom der zugehörigen Verschlingung* L oder ähnlich.) Dabei ist *Breite* ein Begriff, der so etwas wie *Grad* bedeutet, sich aber bei Laurentpolynomen besonders empfiehlt. Die Breite $B(f)$ von $f \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ ist

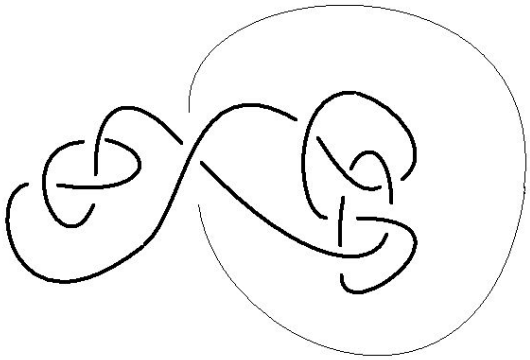
$$(\text{maximaler Exponent von } t \text{ in } f) - (\text{minimaler Exponent von } t \text{ in } f).$$

Das ist auch sinnvoll für $f \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$, nur kann man dann nicht mehr sicher sein, dass $B(f) \in \mathbb{Z}$.
Wir bemerken erstmal, dass

$$B(V(D)) = B(\langle D \rangle)/4$$

wegen der engen Beziehung zwischen Jonespolynom and Klammerpolynom. Ausserdem hängt $\langle D \rangle$ nicht mehr von einer Orientierung von D ab. (Aber wir müssen uns auch wieder daran gewöhnen, dass die Unbestimmte im

Klammerpolynom A heisst.)
Wir nennen D *alternierend*, wenn jeder Bogen von D genau eine Überkreuzung macht. (In den Knotentafeln sind zB die Knotendiagramme 8_{19}, 8_{20} und 8_{21} nicht alternierend; alle anderen mit ≤ 8 Doppelpunkten werden normalerweise durch ein alternierendes Diagramm dargestellt.) Wir nennen D *zusammenhängend*, wenn der von D bestimmte Schatten zusammenhängend ist als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. (Zum Beispiel ist jedes Diagramm, das die Hopf-Verschlingung beschreibt, zusammenhängend.) Wir nennen D *reduziert*, wenn jeder Doppelpunkt von D vier Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus D$ berührt. Beispiel von einem nicht-reduzierten Diagramm:



Wie das Bild zeigt, kann man einen Doppelpunkt von D, an dem weniger als vier Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus D$ zusammentreffen, leicht beseitigen durch *Umklappen* eines Diagrammteils (wobei sich das Diagramm natürlich ändert, die entsprechende Verschlingung aber bis auf Isotopie nicht). Mehr Einzelheiten dazu bei Sanderson, Proposition 2.12.

Bezeichnungen. Sei $M(D)$ der maximale Exponent von A in $\langle D \rangle$ und $m(D)$ der minimale Exponent. Für jeden Zustand s von D sei $M_s(D)$ der maximale Exponent von A und $m_s(D)$ der minimale Exponent von A im Ausdruck

$$A^{\Sigma_y s(y)}(-A^{-2} - A^2)^{|sD|-1}.$$

Weil $\langle D \rangle = \sum_s A^{\Sigma_y s(y)}(-A^{-2} - A^2)^{|sD|-1}$, folgt sofort

$$\min_s \; m_s(D) \leq m(D) \leq M(D) \leq \max_s \; M_s(D) \; .$$

Ausserdem ist $M_s(D) = 2|sD| - 2 + \Sigma_y s(y)$ und $m_s(D) = -2|sD| + 2 + \Sigma_y s(y)$.

Lemma 1. *Für alle Zustände s von D gilt*

$$M_s(D) \leq M_{s_+}(D)\ , \qquad m_s(D) \geq m_{s_-}(D)$$

wobei s_+ und s_- die konstanten Zustände sind ($s_+(y) = 1$, $s_-(y) = -1$ für alle Doppelpunkte y von D). *Diese Ungleichungen sind strikt* (kleiner als bzw grösser als) *wenn $s \neq s_+$ bzw $s \neq s_-$ und D alternierend und reduziert ist.*

Sei jetzt n die Zahl der Doppelpunkte von D.

Lemma 2. $|s_+D|+|s_-D| \leq n+2$ *wenn D zusammenhängend ist. Gleichheit gilt, wenn D ausserdem alternierend ist.*

Wir schieben die Beweise etwas auf und leiten stattdessen die wichtigsten Korollare her. Sei D zusammenhängend. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} M(D) - m(D) & \leq & \max_s\ M_s(D) - \min_s\ m_s(D) \\ = \quad M_{s_+}(D) - m_{s_-}(D) & = & 2n + 2(|s_+D| + |s_-D|) - 4 \quad \leq \quad 4n \end{array}$$

also kurz gesagt:

Korollar. $B(\langle D \rangle) \leq 4n$ *wenn D zusammenhängend ist.*

Im Falle von D zusammenhängend, alternierend und reduziert haben wir

$$M(D) - m(D) = M_{s_+}(D) - m_{s_-}(D) = 2n + 2(|s_+D| + |s_-(D)|) - 4 = 4n$$

also kurz gesagt:

Korollar. $B(\langle D \rangle) = 4n$ *wenn D zusammenhängend, alternierend und reduziert ist.*

Für eine orientierte Verschlingung L mit Jonespolynom $V(L)$ bedeuten die Korollare folgendes. *Jedes zusammenhängende Diagramm, das L beschreibt, hat mindestens $B(V(L))$ Doppelpunkte. Wenn das Diagramm auch noch alternierend und reduziert ist, dann hat es genau $B(V(L))$ Doppelpunkte.*

Beweis von Lemma 1. Wir numerieren die Doppelpunkte, an denen s den Wert -1 hat: $x_1, \ldots, x_r$. Wir bauen eine endliche Folge von Zuständen

$$s_0, s_1, \ldots, s_r$$

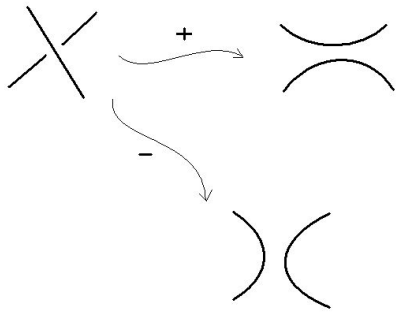
von D derart, dass $s_k(y) = -1$ genau dann, wenn $y \in \{x_1, \ldots, x_k\}$. Das bedeutet, dass s_k und s_{k-1} sich nur an der Stelle x_k unterscheiden. Daraus folgt leicht

$$|s_kD| \leq |s_{k-1}D| + 1$$

und ausserdem haben wir $\Sigma_y s_k(y) = (\Sigma_y s_{k-1}(y)) - 2$. Daher $M_{s_k} \leq M_{s_{k-1}}$ wegen unserer Formel. Daher $M_s \leq M_{s_+}$, denn $s = s_r$ und $s_+ = s_0$.
Jetzt machen wir weiter mit der zusätzlichen Annahme, dass D alternierend und reduziert ist. Wir spielen immer noch dasselbe Spiel wie vorher, bauen also die Zustände $s_0, s_1, \ldots, s_r$ mit $s_0 = s_+$ und $s_r = s$. Es genügt jetzt,

zu zeigen, dass $|s_1 D| = |s_0 D| - 1$, wobei natürlich immer noch $s_0 = s_+$. Lickorish sagt dazu folgendes: Wir färben die Zusammenhangskomponenten des Komplements $\mathbb{R}^2 \setminus D$ mit Schachbrettmuster. Die geschlossenen Kurven von Diagramm $s_+ D$ sind jetzt im wesentlichen die Randkurven von den weissen Regionen von $\mathbb{R}^2 \setminus D$ mit abgerundeten Ecken. (Wenn das nicht der Fall ist, bitte Schwarz und Weiss vertauschen; dann ist es der Fall.) Um von $s_+ D = s_0 D$ zu $s_1 D$ überzugehen, müssen wir am Doppelpunkt x_1 von D eine Änderung machen ... dadurch verschmelzen die Randkurven von den zwei weissen Regionen, die an x_1 grenzen, zu einer einzigen. Weiter passiert nichts, also die Anzahl der geschlossenen Kurven nimmt um eins ab. (Es ist jetzt äusserst wichtig, dass tatsächlich zwei verschiedene weisse Regionen an x_1 grenzen; deswegen haben wir vorausgesetzt, dass das Diagramm D reduziert ist.)
Die Argumente für $m_s(D)$ und $m_{s_-}(D)$ sind ähnlich. $\square$

Beweis von Lemma 2. Der erste Teil soll durch Induktion nach n (Anzahl der Doppelpunkte von D) gemacht werden. Wenn $n = 0$, dann ist $D = \bigcirc$ und die Aussage ist richtig: $|s_+ D| = |s_- D| = 1$. Für $n > 0$ wählen wir einen Doppelpunkt y von D. Wie üblich gibt es zwei Arten, den Doppelpunkt aufzulösen.



Mindestens eine dieser Auflösungen führt uns wieder zu einem zusammenhängenden Diagramm D'. (Dazu betrachte man diejenige glatte geschlossene Kurve des Diagramms D, die den überkreuzenden Zweig bei y enthält. Sie kann durch eine glatte reguläre Abbildung $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert werden. Das Urbild $f^{-1}(y)$ hat höchstens zwei Elemente, mindestens eins. Wenn es nur ein Element hat, dann heisst das, dass wir in Diagramm D auf dem überkreuzenden Zweig bei y in einer gewählten Richtung loswandern können und dann nach einer gewissen Zeit ein erstes Wiedersehen mit y feiern dürfen,

wobei Ankunft auf dem überkreuzenden Zweig, Ankunftsseite $\neq$ Abfahrtsseite. Damit ist klar, dass *jede* der beiden möglichen Auflösungen uns wieder zu einem zusammenhängenden Diagramm führt. Wenn aber $f^{-1}(y)$ zwei Elemente hat, dann heisst das, dass wir auf dem überkreuzenden Zweig bei y in einer gewählten Richtung loswandern können und nach einer gewissen Zeit ein erstes Wiedersehen mit y feiern dürfen, wobei Ankunft auf dem unterkreuzenden Zweig. Wenn wir jetzt den Doppelpunkt bei y so beseitigen, dass die Abfahrts-Hälfte vom überkreuzenden Zweig und die Ankunfts-Hälfte vom unterkreuzenden Zweig nicht getrennt werden, dann bleibt das neue Diagramm D' zusammenhängend.) Wegen Induktionsvoraussetzung wissen wir

$$|s_+D'| + |s_-D'| \leq n + 1.$$

Wenn unsere gewählte Auflösung bei Doppelpunkt y von D vom Typ $+$ war, dann ist $|s_+D'| = |s_+D|$. Ausserdem ist ohnehin

$$|s_-D| \leq |s_-D'| + 1 \ .$$

Dann folgt

$$|s_+D| + |s_-D| \leq n + 2.$$

Ähnlich kann man argumentieren, wenn die gewählte Auflösung bei Doppelpunkt y von D vom Typ $+$ war. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Jetzt soll zusätzlich angenommen werden, dass D alternierend ist. Wie im Beweis von Lemma 1 färben wir die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \smallsetminus D$ mit Schachbrettmuster ein. Wie im Beweis von Lemma 1 sollen wir einsehen, dass $|s_+D|$ die Anzahl der weissen Regionen ist und $|s_-D|$ die Anzahl der schwarzen Regionen (notfalls Farben vertauschen); auf jeden Fall

$$|s_+D| + |s_-D| = \text{ Anzahl der Zus.hangskomponenten von } \mathbb{R}^2 \smallsetminus D \ .$$

Jetzt ist es besser, $\mathbb{R}^2$ durch $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty$ zu ersetzen; wir denken uns also das Diagramm in S^2, und $|s_+D| + |s_-D|$ ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $S^2 \smallsetminus D$. (Ausserdem können wir uns von jetzt an D einfach als Schatten denken, also als Teilmenge von S^2; die Überkreuzungsinfo wird nicht mehr gebraucht.) Euler's Formel soll angewandt werden. Das Diagramm D bestimmt eine Zerlegung von S^2 mit n Ecken, $2n$ Kanten[1] und, wie wir gesehen haben, $|s_+D| + |s_-D|$ Flächenstücken. Also muss

$$n - 2n + (|s_+D| + |s_-D|) = 2$$

gelten, und daraus folgt $|s_+D| + |s_-D| = n + 2$.

Dieser Gebrauch von Euler's Formel sollte allerdings gerechtfertigt werden, und so eine Rechtfertigung ist nicht einfach. Wichtig ist vor allem, dass die

[1] Die Ecken sind die Doppelpunkte. Warum $2n$ Kanten? Jede Ecke bestimmt vier Ausgänge und jede Kante verbindet zwei Ausgänge von solchen Ecken.

Flächenstücke homömorph zu D^2 oder $\mathbb{R}^2$ sind (je nachdem, ob die angrenzenden Kanten und Ecken mitgenommen werden oder nicht). Das ist der Fall, weil/wenn wir voraussetzen, dass D ein zusammenhängendes Diagramm ist (aber ich muss darauf verzichten, es zu beweisen). Wenn D nicht zusammenhängend ist, ist es nicht der Fall. (Wenn zum Beispiel D als Schatten zwei Zusammenhangskomponenten hat, dann gibt es genau eine Zusammenhangskomponente von $S^2 \smallsetminus D$, die beide Zusammenhangskomponenten von D berührt, und diese ist nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^2$, weil sie stattdessen zu $\mathbb{R} \times S^1$ homöomorph ist. In so einem Fall gilt Euler's Formel nicht.) $\square$