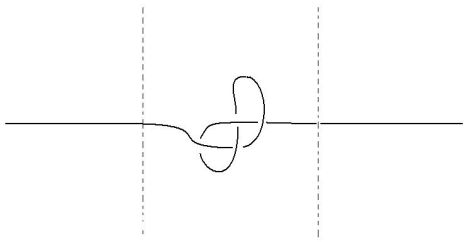
07.06.2013

# Übungsblatt 8 zu Knotentheorie Sommersemester 2012/13 (Weiss)

*Langknoten und Knotensumme.* Sei $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 < x < 1\}$ und $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$. Ein Langknoten ist eine glatte 1-dimensionale zusammenhängende Untermannigfaltigkeit $K$ von $\mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft $K \smallsetminus W = L \smallsetminus W$. Bild:



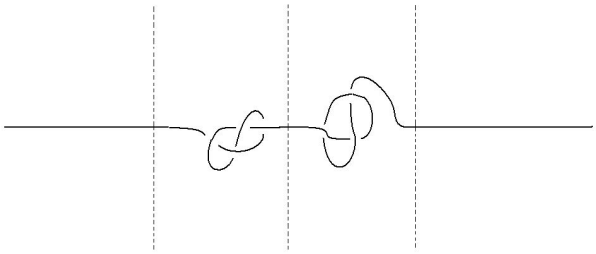
Zwei Langknoten $K_0$ und $K_1$ heissen *isotop*, wenn eine glatte Abbildung

$$u\colon \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

existiert mit den Eigenschaften

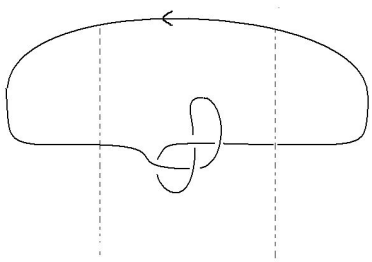
- $u(x,t) = (x,0,0)$ für alle $t \in [0,1]$ und alle $x$ mit $|x| \geq 1$
- für festes $t \in [0,1]$ ist die Abbildung $x \mapsto u(x,t)$ injektiv und regulär (Ableitungen überall $\neq 0$) und ihr Bild ist ein Langknoten, speziell für $t = 0$ der Langknoten $K_0$ und für $t = 1$ der Langknoten $K_1$.

Die Summe $K + K'$ von zwei Langknoten $K$ und $K'$ wird wie folgt definiert: auf $K$ die Abbildung $(x,y,z) \mapsto ((x-1)/2, y, z)$ anwenden, auf $K'$ die Abbildung $(x,y,z) \mapsto ((x+1)/2, y, z)$, Resultate nebeneinander platzieren. Bild:



**Aufgabe 1.** Zeigen, dass diese Summenoperation (von Langknoten) bis auf Isotopie assoziativ und kommutativ ist. (Kommutativität ist der interessantere Teil.)

Aus einem Langknoten kann man einen gewöhnlichen orientierten Knoten konstruieren durch folgende Prozedur:



Dadurch wird eine Abbildung

$$\begin{array}{c} \{\text{Isotopieklassen von Langknoten}\} \\ \Big\downarrow \alpha \\ \{\text{Isotopieklassen von gewöhnlichen orientierten Knoten}\} \end{array}$$

definiert.

**Aufgabe.** Zeigen, dass diese Abbildung bijektiv ist. (Injektivität ist der interessantere Teil.)
*Hinweis*: Man kann eine Abbildung $\beta$ in der entgegengesetzten Richtung bauen unter Benutzung der Idee *Inversion*. Mit Inversion ist gemeint: Anwenden der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{\mathbf{0}\} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \smallsetminus \{\mathbf{0}\} \\ (x,y,z) &\mapsto \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^2} \end{aligned}$$

Wenn ein gewöhnlicher orientierter Knoten daherkommt und zufällig den Punkt $\mathbf{0} = (0,0,0)$ enthält usw usw ....

*Kommentar*: Man sieht, dass die Summe von Langknoten eine sehr einleuchtende Operation ist. Die Summe von gewöhnlichen orientierten Knoten definiert man so, wie wir sie definiert haben, um zu erreichen, dass die Bijektion $\alpha$ mit den Summenoperationen verträglich ist.

*Punkte: 8, 12.*