01.06.2013

Übungsblatt 7 zu Knotentheorie Sommersemester 2012/13 (Weiss)

Dieses Übungsblatt ist ein verzweifelter Versuch, ein paar Aufgaben über Flächen im $\mathbb{R}^3$ zusammmenzustellen ... obwohl die Grundlagen dafür nicht vorhanden sind oder nicht als bekannt vorausgesetzt werden sollen.

Ein Spezialfall vom *Satz von Sard*, der für uns wichtig ist: *Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Fläche ohne Rand und $g\colon F \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann ist die Menge der kritischen Werte von g eine Lebesgue-Nullmenge*[1].
Vokabular: Die Funktion g heisst *glatt*, wenn es eine glatte Funktion $\bar{g}$ gibt, die auf einer offenen Umgebung von F in $\mathbb{R}^3$ definiert ist und auf F mit g übereinstimmt. Eine reelle Zahl y heisst *kritischer Wert* von g, wenn es ein $x \in F$ gibt mit $g(x) = y$ und $dg(x) = 0$. Dabei ist $dg(x)$ die totale Ableitung von g an der Stelle x, also eine lineare Abbildung vom 2-dimensionalen Tangentialraum T_xF nach $\mathbb{R}$.
Bemerkung: Wenn $y \in \mathbb{R}$ *nicht* kritischer Wert von g ist, dann ist also $dg(x) \neq 0$ für jedes $x \in g^{-1}(y)$. Dann kannn man sich leicht überlegen, dass die Menge $g^{-1}(y)$ eine glatte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von F ist. (Satz über implizite Funktionen benutzen.)
Noch eine Bemerkung: Es wird nicht vorausgesetzt, dass F kompakt ist oder auch nur abgeschlossen als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 1. Gegeben zwei glatte kompakte Flächen L, M in $\mathbb{R}^3$, beide ohne Rand; ausserdem sei M orientierbar. Zu zeigen:

(i) Es existieren eine offene Umgebung U von M, ein Intervall $]-\varepsilon, +\varepsilon[$ in $\mathbb{R}$ und eine umkehrbar-differenzierbare Abbildung

$$\psi\colon U \longrightarrow M \times]-\varepsilon, +\varepsilon[$$

mit $\psi(x) = (x, 0)$ für alle $x \in M$.

(ii) Es existieren beliebig kleine $\delta > 0$ derart, dass die Fläche

$$M_\delta := \psi^{-1}(M \times \{\delta\}) \subset U$$

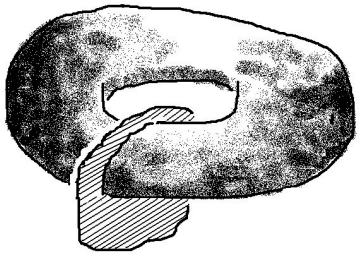
einen transversalen Durchschnitt mit L macht. (Das bedeutet, dass für jedes $x \in M_\delta \cap L$ die Tangentialräume T_xL und T_xM_δ verschieden sind. Dann folgt leicht, wie in Vorlesung angedeutet, dass $L \cap M_\delta$ eine glatte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.)

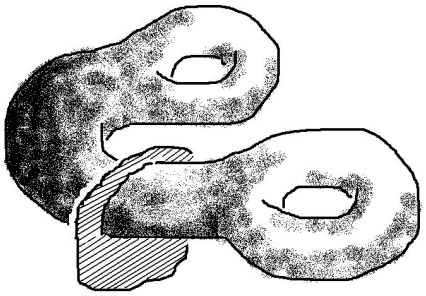
[1] Falls dieser Begriff unbekannt ist: wichtig ist hier, dass das Komplement eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2. Gegeben sei ein orientierter Knoten K in $\mathbb{R}^3$ mit Seifertfläche L (orientiert), und eine andere kompakte *zusammenhängende* glatte orientierte Fläche M in $\mathbb{R}^3$, ohne Rand. Weitere Voraussetzungen: $K \cap M = \emptyset$, und an jeder Stelle $x \in L \cap M$ soll $T_x L \neq T_x M$ gelten (so dass, wie oben erklärt,

$$C := L \cap M$$

eine glatte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist). Zu zeigen: Wenn jede Zusammenhangskomponente C_j von C die Fläche M trennt (also $M \smallsetminus C_j$ nicht zusammenhängend ist), dann gibt es eine andere Seifertfläche L_1 für K, die leeren Durchschnitt mit M hat.
Ein paar Bilder dazu:





In beiden Bildern ist der Knoten K ein Unknoten und L ist eine Scheibe. Weiter hat C nur eine Komponente, also $C_j = C$. Im ersten Bild ist allerdings die Bedingung, dass C_j die Fläche M trennen soll, nicht erfüllt, und man sieht auch nicht, wie L_1 gefunden werden kann (es kann nicht gefunden werden). Im zweiten Bild ist die Bedingung erfüllt, $C_j = C$ trennt M, und man kann auch leicht sehen, wie L_1 konstruiert werden kann.

Punkte: 10, 10.