17.05.2013

Übungsblatt 6 zu Knotentheorie Sommersemester 2012/13 (Weiss)

Eine Definition, die ich in der Vorlesung am Do 16.05. gerade nicht geschafft habe: Ein orientierter Knoten K hat das *Geschlecht* m, wenn eine Seifertfläche für K mit Geschlecht m existiert und jede (andere) Seifertfläche für K Geschlecht $\geq m$ hat.

1. Zeigen: Es gibt unendliche viele paarweise nicht-isotope (orientierte) Knoten vom Geschlecht 1. (*Hinweis dazu*: Die Knoten(diagramme) 4_1, 6_1, 8_1 folgen einem gewissen Muster, das man fortsetzen kann ... so dass man sich ungefähr denken kann, wie 10_1, 12_1 usw aussehen. Diese Knoten haben das Geschlecht 1. *Später hinzugefuegt, 19.5.: Etwas leichter geht es wahrscheinlich mit* 5_2, 7_2 *und weiter im selben Muster.* Nicht vergessen, zu zeigen, dass man auf die oder jene Weise unendlich viele Isotopieklassen erhaelt.)

2. Sei $f : D^2 \to \mathbb{R}^3$ eine glatte, injektive, reguläre Abbildung. (*Regulär* bedeutet, dass die Matrix der partiellen ersten Ableitungen von f überall den Rang 2 hat.) Zeigen, dass f isotop ist zur Standardinklusion von D^2 in $\mathbb{R}^3$. (Das heisst, man soll eine Familie $(f_t)_{t\in[0,1]}$ von glatten, injektiven, regulären Abbildungen $D^2 \to \mathbb{R}^3$ angeben so dass $f_0 = f$ und f_1 die Standardinklusion ist, und $(x,t) \mapsto f_t(x)$ eine glatte Abbildung ist.)
Korollar: Ein Knoten vom Geschlecht 0 ist ein Unknoten.

3. Zum Thema Tensorprodukt: Das Tensorprodukt von zwei Moduln M und N über einem kommutativen Ring R ist ein R-Modul $M \otimes_R N$. Die Elemente von $M \otimes_R N$ können beschrieben werden als formale Linearkombinationen (mit Koeffizienten in R) von Symbolen $m \otimes n$, mit $m \in M$ und $n \in N$ beliebig, die den folgenden Relationen "unterworfen" werden:

$$rm \otimes n = m \otimes rn = r(m \otimes n),$$

$$(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n,\ m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2\ .$$

Einzelheiten dazu sollte man in Algebra-Büchern nachlesen, zB S Lang "Algebra". Wichtiger Spezialfall: Sei $f : R \to S$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen. Dann wird S in naheliegender Weise ein R-Modul, den wir zur Sicherheit als S_f beschreiben. Wenn jetzt M irgendein R-Modul ist, dann ist $M \otimes_R S_f$ nach obiger Definition ein R-Modul, aber man überlegt sich, dass es eigentlich ein S-Modul ist, der dann natürlich mit Hilfe von f auch ein R-Modul wird. Denn ein Element $\sum_i r_i(m_i \otimes s_i)$ von $M \otimes_R S_f$ kann mit einem Element s von S multipliziert werden mit Ergebnis $\sum_i r_i(m_i \otimes s_i s)$.
Jetzt sei $R = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ und $S = \mathbb{Z}$. Es gibt genau zwei Ringhomomorphismen

von R nach S. In der Vorlesung war (zu oberflächlich) erwähnt worden: Für ein Verschlingungsdiagramm D mit Alexandermodul $\mathcal{A}(D)$ ist immer

$$\mathcal{A}(D) \otimes_R S_f \cong \mathrm{Col}(D)$$

wenn der Ringhomomorphismus $f : R \to S$ durch $t \mapsto -1$ definiert ist. Hier wird $\mathcal{A}(D)$ als R-Modul aufgefasst und $\mathrm{Col}(D)$ als S-Modul.

(1) Diese Sache nochmal erklären.
(2) Ausserdem zeigen: Für ein Knotendiagramm D mit Alexandermodul $\mathcal{A}(D)$ ist immer

$$\mathcal{A}(D) \otimes_R S_f = 0$$

wenn der Ringhomomorphismus $f : R \to S$ durch $t \mapsto 1$ definiert ist.

Punkte: 8, 5, 3+4. Abgabetermin ist der 31.Mai.