07.05.2013

Übungsblatt 5 zu Knotentheorie Sommersemester 2012/13 (Weiss)

1. Können Sie zeigen, dass die Knoten 7_1 und 5_2 (zB aus Lickorish Knotentabelle oder Rolfsen Knot Table) nicht isotop sind? Sie dürfen benutzen, dass beide invertierbar (*reversible*) sind, wenn das hilft.

2. Sei $R = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, der Laurent-Polynomring. Gegeben sei eine $m \times m$-Matrix A mit Einträgen in R. Sei M der Cokern des durch die Matrix A definierten Modulhomomorphismus $R^m \longrightarrow R^m$. Zu zeigen:

(i) Für jedes $v \in M$ gilt $\det(A) \cdot v = 0$. Dabei ist $\det(A)$ natürlich ein Element von R, und der Punkt in $\det(A) \cdot v$ ist wegen der Struktur von M als Modul über R gerechtfertigt. (Hinweis: Cramer's Regel.)

(ii) Sei $\det(A) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots + b_{n-r} t^{n-r} \in R$, wobei $b_n, \ldots, b_{n-r} \in \mathbb{Z}$. Wenn $b_n = \pm 1$ und $b_{n-r} = \pm 1$, dann ist M endlich erzeugt als abelsche Gruppe. (Hinweis: Teil (i) benutzen.)

Punkte: 10, 6+4.

Nicht zur Abgabe. Ein paar kleine Nachträge, Fragen und Bemerkungen, die auch gerne in den Übungen diskutiert werden können. Bei (i) und (ii) habe ich das Gefühl, dass ich in der Vorlesung etwas Unrichtiges oder zu wenig dazu gesagt habe.

(i) Für jedes Verschlingungsdiagramm D mit r Komponenten gilt: $\mathcal{F}_2(D)$ ist isomorph zu $(\mathbb{Z}/2)^{r-1}$.

(ii) Wie kann man zeigen, dass die Whitehead-Verschlingung nicht isotop ist zu einer Un-Verschlingung? Im Zusammenhang damit, was ist $\mathrm{Col}(D)$, wenn D ein Diagramm für die Whitehead-Verschlingung bezeichnet?

(iii) Problem 3.(ii) auf Übungsblatt 3 hat Schiffbruch erlitten. Die Behauptung ist in dieser Allgemeinheit möglicherweise falsch. Tschuldigung. Gut, dass so wenige Lösungen abgegeben wurden! Allerdings war Teil (i) der Aufgabe in Ordnung.

(iv) Sei D ein Verschlingungsdiagramm. Das "duale" Verhältnis zwischen $\mathcal{F}_n(D)$ und $\mathrm{Col}(D)$ ist von mir betont worden, aber vielleicht noch nicht genug. Wir haben für $\mathcal{F}_n(D)$ eine Definition als *Kern* eines Homorphismus

$$(\mathbb{Z}/n)^p \longrightarrow (\mathbb{Z}/n)^q$$

wobei $p+1$ die Zahl der Bögen und q die Zahl der Doppelpunkte ist. Dagegen haben wir fuer $\mathrm{Col}(D)$ eine Definition als *Cokern* eines Homomorphismus

$$\mathbb{Z}^q \longrightarrow \mathbb{Z}^p \ .$$

In welchem Verhältnis zueinander stehen die Matrizen, die diese beiden Homomorphismen beschreiben? Im Zusammenhang damit allgemeine Frage: Wenn Sie eine endliche Präsentation von einer abelschen Gruppe M haben (aufgefasst als $\mathbb{Z}$-Modul), wie können Sie dann schnellstmöglich eine endliche Präsentation von $\hom(M, \mathbb{Z}/n)$ (aufgefasst als $\mathbb{Z}/n$-Modul) hinschreiben? Und warum wird das hier gefragt?