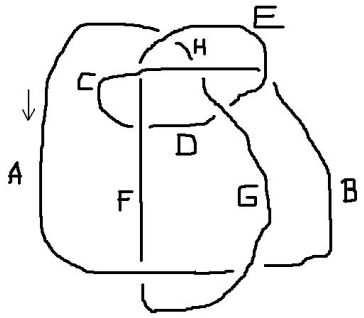
03.05.2013

Übungsblatt 4 zu Knotentheorie Sommersemester 2012/13 (Weiss)

1. Der Polynomring $\mathbb{Z}[t]$ ist im Gegensatz zu $\mathbb{Q}[t]$ kein Hauptidealring. Er ist aber Nöthersch, das heisst speziell, dass jedes Ideal in $\mathbb{Z}[t]$ endlich erzeugt ist (als Modul über $\mathbb{Z}[t]$). Beispiel geben von einem Ideal, das von zwei Elementen erzeugt werden kann, aber nicht von einem. Gibt es auch ein Ideal, das von drei Elementen erzeugt werden kann, aber nicht von zwei?

2. (i) Zeigen: Ein Ideal J im Laurentpolynomring $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ ist eindeutig bestimmt durch den Durchschnitt $J \cap \mathbb{Z}[t]$.
(ii) Wie kann man die Ideale von $\mathbb{Z}[t]$ charakterisieren, die die Form $J \cap \mathbb{Z}[t]$ haben für ein Ideal J von $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$?
(iii) Was sind eigentlich die Einheiten (invertierbaren Elemente) von $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$?

3. (i) Jede Region V (Zusammenhangskomponente vom Komplement) des Knotendiagramms $D = 8_{20}$ (Bild unten) bestimmt eine Zahl $k_V \in \mathbb{Z}$. Wenn nämlich $f : S^1 \to D$ eine Parametrisierung ist (mit der angedeuteten Orientierung) und $x \in V$, dann ist k_V die Umlaufzahl von f um x (wie zB in Funktionentheorie). Man bestimme k_V für jede dieser Regionen.



(ii) Die Relationen $S_1, S_2, \ldots, S_8$, die in der Definition vom Alexandermodul $\mathcal{A}(D)$ vorkommen (entsprechen den Doppelpunkten von D), sollen sämtlich hingeschrieben werden, und zwar in der Form so-und-so=Null. (Ein Anfang: $E - tE - H + tA = 0$. Beachten, dass Orientierung von D schon von mir gewählt.) Siehe auch Sanderson Lecture 11. **Zeigen**: es existieren Einheiten $u_1, \ldots, u_8$ in $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, so dass $u_1 S_1 + u_2 S_2 + \cdots u_8 S_8$ die triviale Relation 0=0 ist.
Dabei sollen Teil (i) dieser Aufgabe (und vielleicht noch Teil (iii) der vorigen)

ein Hinweis sein. Bitte auf weitere Hinweise in der Montagsvorlesung gefasst sein (möglich ist zB: “es geht überhaupt nicht”).

Punkte: 5,5,10.