28.06.2013

Übungsblatt 11 zu Knotentheorie Sommersemester 2012/13 (Weiss)

1. Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge (das heisst, X ist eine Menge und $\leq$ ist eine Ordnungsrelation auf X). Wir haben gesehen, dass $(X, \leq)$ eine kleine Kategorie $\mathcal{C}$ bestimmt mit $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = X$ und

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{C}}(x, y) = \begin{cases} \text{einelementige Menge wenn } x \leq y \\ \emptyset \text{ sonst.} \end{cases}$$

Zeigen: Das Produkt $x \prod y$ von zwei Objekten x, y in $\mathcal{C}$ ist $\inf\{x, y\}$ (das heisst, $x \prod y$ existiert genau dann, wenn $\inf\{x, y\} \in X$ existiert, und dann sind die beiden gleich). Auch zeigen: Das Koprodukt $x \coprod y$ ist $\sup\{x, y\}$ (das heisst, $x \coprod y$ existiert genau dann, wenn $\sup\{x, y\} \in X$ existiert, und dann sind die beiden gleich).

2. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, die ein terminales Objekt z besitzt. Zeigen: für jedes Objekt c in $\mathcal{C}$ existiert das Produkt $c \prod z$ und ist isomorph zu c.
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, die ein initiales Objekt a besitzt. Zeigen: für jedes Objekt c in $\mathcal{C}$ existiert das Koprodukt $c \coprod a$ und ist isomorph zu c.

3. Sei C die zyklische Gruppe der Ordnung 2. Sei D die Gruppe der isometrischen Abbildungen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$, mit Hintereinanderausführen als Multiplikation. (Hier wird $\mathbb{Z}$ als metrischer Raum aufgefasst mit der üblichen Metrik; eine isometrische Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ hat also die Form $z \mapsto az + b$ für feste $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a = \pm 1$.) Zeigen, dass $C * C$ isomorph zu D ist. Dabei ist $*$ das Koprodukt in der Kategorie der Gruppen (auch *freies Produkt* genannt).

4. Vereinfachen Sie den Begriff *Gruppenobjekt in der Kategorie der Gruppen.*

Punkte: 6, 4, 7, 3.